Blatt 7

Prof. Dr. N-P. Skoruppa und Dr. Jan Fricke Abgabe: Fr, 30. Mai 08

w3.countnumber.de

Aufgabe 1.

1. Schreiben Sie ein SAGE-Programm, dass für eine Primzahl p die Anzahl der Lösungen der Gleichung

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \equiv 0 \mod p$$

berechnet.

2. Tabellieren Sie diese Werte für alle Primzahlen bis 29.

3. Zusatzaufgabe: Welche Formel vermuten Sie für die gesuchte Anzahl?

Aufgabe 2. Ordnen Sie die arithmetischen Funktionen

- n,
- $C(n) = 1$,
- $\varphi(n) =$ Anzahl der primen Restklassen zu n,
- $\sigma(n) =$ Summe der Teiler von n,
- $d(n) =$ Anzahl der Teiler von n

der Größe nach (für hinreichend großes n). Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 3. Man zeige $\dfrac{n}{\varphi(n)} = \sum_{d|n} \dfrac{\mu(d)^2}{\varphi(d)}$.

Hinweis: Nutzen Sie die Multiplikativität aus.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass die Möbius-Funktion nicht als Dirichlet-Produkt von zwei stark multiplikativen arithmetischen Funktionen dargestellt werden kann.

Hinweis: Führen Sie $C \star f \star g = \mathbb{E}$ für stark multiplikative Funktionen zum Widerspruch.

Zusatzaufgabe: Zeigen Sie, dass die Möbius-Funktion nicht als Dirichlet-Produkt von endlich vielen stark multiplikativen arithmetischen Funktionen dargestellt werden kann.