Aufgaben zur Zahlentheorie - 08

Blatt 1

Prof. Dr. N-P. Skoruppa und Dr. Jan Fricke — Abgabe: Fr, 21. April 08
www.countnumber.de

Für die Übungen werden Sie ein Computer-Algebra-System (CAS) benötigen, welches mindestens das Rechnen mit beliebig langen ganzen Zahlen, rationalen Zahlen, Polynomen und Kongruenzen beherrscht. Wir empfehlen SAGE. Falls Sie ein anderes System benutzen möchten, so nehmen Sie bitte mit Herrn Dr. Fricke Rücksprache.

Aufgabe 1. Schreiben Sie für Ihr CAS einen Algorithmus zur Faktorisierung einer natürlichen Zahl n, der nur die vier Grundrechenarten benutzt. (Die Benutzung der Funktion `factor()` in SAGE ist nicht erlaubt.) Wie lange benoetigt Ihr Programm zur Faktorisierung der Zahl $n = 10967535067$? Wie lange benötigt SAGEs Funktion `factor()`?

Aufgabe 2. Schreiben Sie ein Programm zur Erstellung einer Tabelle für die Anzahl der Primzahlzwillinge unterhalb 10, 100, $10^3, \ldots, 10^6$. (Sie dürfen die SAGE-Funktion `is_prime()` benutzen.)

Aufgabe 3. Eine Zahl π des Rings

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-10}] := \{x + y\sqrt{-10} : x, y \in \mathbb{Z}\}$$

heisst *unzerlegbar (in* $\mathbb{Z}[\sqrt{-10}]$*)*, falls π keine anderen Teiler als ± 1 und $\pm\pi$ besitzt. (Dabei heißt α *Teiler* von β — in Zeichen $\alpha|\beta$ —, falls ein $\xi \in \mathbb{Z}[\sqrt{-10}]$ existiert, sodass $\alpha = \beta\xi$ gilt.)

1. Zeigen Sie, dass sich jede Zahl $\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{-10}]$ bis auf ein Vorzeichen als Produkt von unzerlegbaren Zahlen in $\mathbb{Z}[\sqrt{-10}]$ schreiben lässt.

2. Zeigen Sie, dass die Zahlen $1+3\sqrt{-10}$, $1-3\sqrt{-10}$, $9+\sqrt{-10}$, $9-\sqrt{-10}$ unzerlegbar sind, und dass allerdings

$$91 = (1 + 3\sqrt{-10})(1 - 3\sqrt{-10}) = (9 + \sqrt{-10})(9 - \sqrt{-10})$$

gilt.

Hinweis: Ist $\alpha = \beta\xi$, so ist $\mathrm{N}(\alpha) = \mathrm{N}(\beta)\mathrm{N}(\xi)$, wo $\mathrm{N}(x + y\sqrt{-10}) = x^2 + 10y^2$ gilt. Insbesondere folgt aus $\alpha|\beta$, dass die ganze Zahl $\mathrm{N}(\alpha)$ die ganze Zahl $\mathrm{N}(\beta)$ teilt.

Aufgabe 4. Man zeige, dass der Bruch $\dfrac{21n + 4}{14n + 3}$ für keine natürliche Zahl n zu kürzen ist.