

Blatt 8

Prof. Dr. N-P. Skoruppa und C. Math. L. Fischer Abgabe: Mo 18-06-2007

Für jede richtig gelöste Aufgabe werden 4 Punkte vergeben.

Aufgabe 1. Sei $F(X, Y)$ ein Polynome vom Grad ≤ 2 mit rationalen Koeffizienten. Zeigen Sie: Es gibt eine invertierbare 2×2 -Matrix mit rationalen Einträgen und rationale Zahlen x_0, y_0, a, b, c , sodass $F((x + x_0, y + y_0)A) = ax^2 + by^2 + c$ oder $F((x + x_0, y + y_0)A) = ax^2 + by + c$.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die rationalen Lösungen x, y der Gleichung

$$x^2 - 5y^2 = 1.$$

Aufgabe 3. Schreiben Sie für Ihr CAS eine Funktion `solveEQ(a, b, c)`, die zu paarweise teilerfremden quadratfreien ganzen Zahlen $a, b, c > 0$ eine nicht-triviale Lösung $[x, y]$ der Gleichung $ax^2 + by^2 = cz^2$ zurückgibt, falls eine solche existiert (und etwa $[0, 0]$ zurückgibt, falls eine solche nicht existiert).

Aufgabe 4. Finden Sie eine Formel für die Anzahl der Punkte der projektiven Geraden über $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.