②

Satz $\mathcal{H} := \underset{\text{Spann}_{\mathbb{Z}}}{\mathbb{C}}\langle T(\ell) : (\ell,m)=1\rangle$ kommutativ, halbeinfach

~~$M_k(\Gamma)$: halbeinfach. $\mathcal{H}$-Modul~~

Zerlegungen von $M_k(\Gamma)$ als Hecke-Modul

$$M_k(\Gamma) = M_k^{Eis}(\Gamma) \oplus S_k(\Gamma) \qquad (\text{als } \cancel{\mathcal{H}\text{-Modul}})$$

$$S_k(\Gamma) = \bigoplus V \quad \text{kanonische Zerlegung}$$

$$S_k^{neu}(\Gamma) = \bigoplus_{\dim V = 1} V, \qquad S_k^{alt}(\Gamma) = \bigoplus_{\dim V > 1} V$$

$M_k^{Eis}(\Gamma)$: Prototyp: $E_4 = 1 + 240 \sum_{\ell \geq 1}^{\infty} \sum_{d \mid n} d^3 q^\ell \quad (\in M_4^{Eis}(Sl(2,\mathbb{Z})) \to ②$

$S_k^{alt}(\Gamma)$: trivial aus $S_k(\Gamma_0(m'))$, $m' < m$

$S_k^{neu}(\Gamma) \ni f$ HEF, $L(f,s) = $ [illegible] $\prod \frac{1}{1 - \lambda_p p^{-s} + \delta(p \nmid m) p^{k-1-2s}}$,

$\exists\, K = K_f / \mathbb{Q}$ endl. Körpererw. $\forall p\ \lambda_p \in K_f$

und auch für die Perioden gelten gewisse Algebraizitätsaussagen!

~~Für HEF Perioden interessant~~ Die FC und Perioden von Neuformen haben tiefgehende arithmetische Bedeutung, die auch heute noch nicht ganz verstanden wird. Als Illustration:

$S_2(\Gamma_0(37)) = \mathbb{C} \cdot f$, ~~$f = q + O(q^2)$~~

Satz ("Tunnell")

D Kongruenzzahl $\Longrightarrow L(f \otimes D, 1) = 0$ (Koblitz)!

Ein moderneres Instrument zur Untersuchung von elliptischen Modulformen sind die Jacobiformen. In der Tat sind Jac-formen so etwas wie das Bindeglied zwischen FC und Perioden.

Jacobiformen

$$J^{\pm}_{k,m} = \left\{ \phi = \phi(\tau,z) : \mathfrak{H} \times \mathbb{C} \xrightarrow[\text{hol. in } z]{\text{glatt}} \mathbb{C} \;\middle|\; \begin{array}{l} 1)\ \phi|_{k,m}\gamma = \phi \quad \forall \gamma \in Sl(2,\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^2 \text{ hat FE der Gestalt:} \end{array} \right.$$

~~1) $\phi(\tau+1,z) = \phi(\tau,z+1) = \phi(\tau,z)$~~

~~2) $\phi(\frac{-1}{\tau}, \frac{z}{\tau}) = \ldots e^{2\pi i m z^2/\tau}$~~ $\left\{ \begin{array}{l} \tau^{k}\ldots \\ \bar{\tau}^{k-1} |\tau|^{\ldots} \end{array} \right\}$ für $\pm$

3) $\phi = \sum_{\substack{D, r \in \mathbb{Z} \\ D \equiv r^2 \bmod 4m \\ D > 0\ \text{"+"} \\ < 0\ \text{"-"}}} C_\phi(D,r)\, \underbrace{e^{2\pi i \left(\frac{r^2 - D}{4m} u + \frac{r^2 + |D|}{4m} iv + rz\right)}}_{q_m^{D,r}} \quad (\tau = u + iv)$

$m = 1, 2, \ldots$

wo $C_\phi(D,r) = C_\phi(D, r+2m)$

~~Prototyp: $\vartheta(\tau,z)$ (aber: meromorph in z, $(k,m) = (2,0)$)~~

~~$S^{\pm}_{k,m}$: "$C_\phi(0,r) = 0 \ \forall \frac{r^2}{4m}$"~~

$\dim J^{\pm}_{k,m} < \infty$

$J^{\pm}_{k,m} = \mathcal{E}^{\pm}_{k,m} \oplus S^{\pm}_{k,m}$

Eigentlich sind Jacobiformen älter als Modulformen, Jacobische Thetafkt'n sind die Prototypen, aber ihre arithmetische Bedeutung erst in letzten 15 Jahren erkannt.

Prototyp: $\sum q^{n^2} e^{2\pi i n z}) \in J_{1,\frac{1}{2}}(\Gamma_0(4))$