(1)

~~Jacobiformen, die Perioden und Fourierkoeffizienten von Modulformen~~

Das Grundproblem für elliptische Modulformen: Modulformen und Jacobiformen

Heidelberg 16. 12. 92

$\cancel{SL(2,\mathbb{R})}$ $GL(2,\mathbb{R})$, $\mathfrak{H} = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}\tau > 0\}$, $(A,\tau) \to A\tau = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$ $\quad (A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix})$

$\Gamma \underset{\text{endl.}}{\leq} SL(2,\mathbb{Z})$, $\Gamma = \pi_m^{-1}(G)$ wo $G \leq SL(2, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$, π_m = Red. mod m

$$M_k(\Gamma) = \left\{ f : \mathfrak{H} \xrightarrow{\text{hol.}} \mathbb{C} \;\middle|\; \begin{array}{l} 1)\ \underbrace{f(A\tau)(c\tau+d)^{-k}}_{= f|A(\tau)} = f(\tau) \ \forall A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \\ 2)\ f(A\tau)(c\tau+d)^{-k} = O(1) \ (\operatorname{Im}\tau \to \infty) \ \forall A \in SL(2,\mathbb{Z}) \end{array} \right\}$$

$k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$\dim M_k(\Gamma) < \infty$ $\qquad S_k(\Gamma) = \ldots \qquad = o(1)$

~~Problem: Beschreibung einer Basis von $M_k(\Gamma)$.~~

Jedes $f \in M_k(\Gamma)$ 1-deutig bestimmt durch Angabe aller

1) Fourier koeffizienten $a_f(l)$ $(l = 0, 1, \ldots)$

$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma$, t min. $\rightsquigarrow f(\tau+t) = f(\tau) \overset{\text{mit } 2)}{\rightsquigarrow} f = \sum_{l=0}^{\infty} a_f(l)\, q_t^l \qquad q_t := e^{2\pi i \tau/t}$

$a_f(0) = 0$ ($f \in S_k(\Gamma)$)

2) Perioden: $L(f|M, l)$ $\quad (M \in GL^+(2,\mathbb{Q}),\ 0 < l < k)$

$L(f,s) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{a_f(l)}{l^s}$ $(\operatorname{Re} s > k)$ hat analytische Fortsetzung, höchstens Pol bei $s = k$,

~~$f|M(\tau) = f(M\tau)(c\tau+d)^{-k}$ $(M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix})$~~

$f \in S_2(\Gamma)$: $L(f,1) \sim \int_0^\infty f(\tau)\,d\tau$

spezielle Perioden: $L(f \otimes D, \frac{k}{2}) = \sum \frac{a_f(l)\left(\frac{D}{l}\right)}{l^s} \Big|_{s=\frac{k}{2}}$ $\qquad D$ Diskr. eines quadr. Zahlkörpers

Hecke's Grundproblem: zitieren $\Rightarrow$ // (+)

~~1) & 2) Ist per se transzendente Zahlen, wäre sinnlos, wenn man nicht mehr wüßte, erste Untersuchungen von Hecke, muß für weitere Erklärungen 2, 3 auf Hecke zurückgehende Begriffe erklären~~

Annahme: $\Gamma = \Gamma_0(m) = SL(2,\mathbb{Z}) \cap \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ m\mathbb{Z} & \mathbb{Z} \end{pmatrix}$.

Hecke-Operatoren:

$\mathcal{M}(l) = \left\{ M \in \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ m\mathbb{Z} & \mathbb{Z} \end{pmatrix} \;\middle|\; \det M = l \right\}$ $\quad (l = 1, 2, \ldots)$

$T(l) : M_k(\Gamma) \circlearrowleft \qquad T(l) f = l^{k-1} \sum_{M \in \Gamma \backslash \mathcal{M}(l)} f|M$