~~Maximum~~ côté droit :

$$\log \alpha + \frac{1}{s-1} + \frac{\mathcal{D}'}{\mathcal{D}}(k+s-1) + \frac{1}{k+s-1} = 0 \quad .. \quad \square$$

Si on prend le cas

$$\mathcal{D}(s) = \underbrace{2^{-r_1}\,\Gamma(s/2)^{r_1}\,\Gamma(s)^{r_2}}_{\gamma(s)}\ \zeta(s, 1) \qquad (1 = [\mathcal{O}])$$

alors on peut écrire d'après la théorie classique à la Hecke

$$\mathcal{D}(s) = \int f(t)\, t^s \frac{dt}{t} \quad . \longrightarrow$$

avec un f comme ci-dessus, avec $a_0 = \frac{R}{w}$ et $k = 1$,

d'où

Mais ici on a

$$\mathcal{D}(s) > \gamma(s) \quad \text{car} \quad \zeta(s,1) = 1 + \text{pos.}$$

$$\frac{\mathcal{D}'}{\mathcal{D}}(s) = \frac{\gamma'}{\gamma}(s) + \frac{\zeta'(s,1)}{\zeta(s,1)} \leq \frac{\gamma'}{\gamma}(s) \quad \text{car} \quad \zeta'(s,1) < 0$$

Donc

<u>Théorème:</u> Pour tout $s > 1$ avec $\gamma(s) = 2^{-r_1}\Gamma(s/2)^{r_1}\Gamma(s)^{r_2}$ on a

$$\frac{R}{w} \geq \frac{s(s-1)}{e}\,\gamma(s)\,\exp\left(-\frac{s}{s-1} - s\,\frac{\gamma'}{\gamma}(s)\right)$$

~~$s = \frac{4}{3}$ donne~~ On observe

$$\frac{\gamma'}{\gamma}(s) = \frac{r_1}{2}\,\psi(s/2) + r_2\,\psi(s)$$

le schéma du résultat de Zimmert. En fait

$s = \frac{4}{3}$ on obtient

$$\frac{R}{w} \geq 0{,}00299\ \exp(0{,}48\, r_1 + 0{,}06\, r_2)$$