Soient $f(t) = \sum_{\ell \geq 1}^{\infty} a(\ell)\, e^{-\alpha \ell t}$, $g(t) = \sum_{\ell \geq 0}^{\infty} b(\ell)\, e^{-\beta \ell t}$, $a_0 \in \mathbb{R}$

avec $a(\ell), b(\ell) \geq 0$ (pour $\ell \geq 1$), $\alpha, \beta > 0$ convergent pour tout $t > 0$

et telles que

$$\left(a_0 + f(t)\right) t^k = c_0\, g\left(\tfrac{1}{t}\right) \quad \text{pour un } k > 0.$$

Alors

$$a(0) \geq \frac{e^{-(k+1)}}{k}\, a(1)$$

Démo: $f(t) \downarrow$ pour $t \to \infty$

mais $(a_0 + f(t))t^k = c_0\, g(\tfrac{1}{t}) \uparrow$, car $g(t) \downarrow$

donc

$$0 \leq \frac{d}{dt}(a_0 + f(t))t^k = k t^{k-1}(a_0 + f(t)) - t^k \sum_{\ell > 0} a(\ell)\, e^{-\alpha \ell t}\, \alpha \ell,$$

$$a(0) \geq \sum_{\ell > 0} a(\ell)\, e^{-\alpha t}\left(\frac{\alpha \ell t}{k} - 1\right) \geq a(1)\, e^{-\alpha t}\left(\frac{\alpha t}{k} - 1\right) \text{ si } t > \frac{k}{\alpha}$$

Max pour $t = \frac{k+1}{\alpha}$ … . $\square$

Exemples:

$$f(t) = \vartheta_\Gamma(t) = \sum_{x \in \Gamma} e^{-\pi x^2 t} \qquad (\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n \text{ réseau})$$

$$f(t)\, t^{n/2} = \det(\Gamma)^{-1/2}\, \vartheta_{\Gamma^*}\left(\tfrac{1}{t}\right)$$

Donc

$$\frac{n}{2}\, e^{+(\frac{n}{2}+1)} \geq \#\{x \in \Gamma \mid x^2 = \ell_{min}\} \qquad \ell_{min} = \text{long. minim. des vect. de } \Gamma$$

$\Gamma = A_2 = \mathbb{Z} e^{2\pi i/3} + \mathbb{Z}$: $7{,}38 \geq 6$

$\Gamma = E_8$: $593{,}\ldots \geq 240$

$\Gamma = \text{Leech}$: $5307960{,}\ldots \geq 192\,240$

Corollaire : $f = \sum a_f(\ell)\, e^{2\pi i \ell z}$ forme modulaire sur $SL(2,\mathbb{Z})$ avec coeff. de Fourier non-negatifs, alors f n'est pas parabolique

(f parab. $\Rightarrow$ il ex. coeff. de Fourier > 0 et < 0)