Zimmert optimal:

Zimmert $\Rightarrow \exists\, d_0, d_1 > 1 : \mathrm{Reg}(k) \geq d_0\, d_1^{[k:\mathbb{Q}]}$ $\quad (r_1 + 2r_2 = [k:\mathbb{Q}])$

$k_0 \subseteq k_1 \subseteq \ldots$ Klassenkörperturm $\Rightarrow \mathrm{Reg}(k_i) \geq \mathrm{const}(k_0)^{[k_i:\mathbb{Q}]}$

Bergé – Martinet (83): geom. Interpret. für $\frac{\mathrm{Reg}(L)}{\mathrm{Reg}(k)}$ $\quad (\mathbb{Q} \subseteq k \subseteq L)$

erste Abschätzungen, off. Problem: was gilt hier?

Friedman – Costa (87):

relative Einheiten $E_{L|k} = \{ \varepsilon \in \mathcal{O}_L^* \mid N_{L|k}(\varepsilon) = \text{Einheitswurzel} \}$

relativer Regulator $\mathrm{Reg}(L|k) = |(\det \ldots E_{L|k} \ldots)|$ ~~analog zum Regul~~

(analog zum klassischen Regulator definiert, aber mit $E_{L|k}$)

Lemma: $\mathrm{Reg}(L|k) =$ "trivialer Faktor" $\cdot \frac{\mathrm{Reg}(L)}{\mathrm{Reg}(k)}$.

Friedman – Skoruppa (98):

$\forall k \subseteq L$: $\exists\, a_0 > 0,\ a_1 > 1$ $\quad \frac{\mathrm{Reg}(L)}{\mathrm{Reg}(k)} \geq \left(a_0\, a_1^{[L:k]}\right)^{[k:\mathbb{Q}]} = B$

$\left(a_1 = 1{,}04,\ a_0 = 0{,}003 \cdot \left(\frac{0{,}658}{1{,}04}\right)^{399} \right)$

$[L:k] \leq n_0$ klein $\Rightarrow B \xrightarrow[\text{exp.}]{} \infty$ mit $[L:\mathbb{Q}] \to \infty$

$[L:k] \geq n_0$ groß $\Rightarrow B \geq \tilde{a}_0\, a_1^{(1-\varepsilon)[L:\mathbb{Q}]} \xrightarrow[\text{exp.}]{} \infty$ ("bestmöglich")

genauer: $\varepsilon > 0$ klein und $a_0\, a_1^{\varepsilon n_0} \geq \tilde{a}_0 > 1$.

und Zimmert für $k = \mathbb{Q}$