Abschätzung von ① | Aachen, 24 nov. 95

Einheiten: Regulatoren nach unten.

$[K:\mathbb{Q}]<\infty$, $\mathcal{O}=\mathcal{O}_k$ = ganze in k, $\mathcal{O}^\times$ = Einheiten

Dirichlet: $\mathcal{O}^\times = \mathcal{O}^\times_{tor} \times \varepsilon_1^{\mathbb{Z}} \times \dots \times \varepsilon_r^{\mathbb{Z}}$, ε_j Fundamentaleinh.

$r = r_k$ = # reelle Einbett. + # komplex. Einbett. -1

Komplexität:

groß: Primzahl # 50,000 : $D = 611\ 953$, $k=\mathbb{Q}(\sqrt{D})$

$\mathcal{O}^\times = \pm\varepsilon^{\mathbb{Z}}$ und

P_ε = Mini-pol von $\varepsilon = x^2 - \underbrace{3\dots 8}_{499 \text{ Stellen}} - 1$

klein: $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ ganz

Höhe $h(\alpha) = \prod_{\substack{|\alpha'|>1 \\ \alpha' \text{ konj. zu } \alpha}} |\alpha'| = \prod_{\substack{|\beta|>1 \\ P_\alpha(\beta)=0}} |\beta| =: M(P_\alpha)$ Mahler-Maß

mögl. Komplex. von α : $h(\varepsilon \text{ (wie oben)}) \gg 0$!

Kronecker: $h(\alpha)=1 \iff \alpha$ Einheitswurzel

Lehmer-Verm.: $\exists c>0\ \forall \alpha$ ganz $h(\alpha)\geq c$

$\alpha \neq$ Einheit : $h(\alpha) \geq P_\alpha(0) \geq 2$

also: $h(\alpha)$ klein nur für Einheiten

Rekord: $M(x^{10}+x^9-x^7-x^6-\dots-x^3+x+1) = 1.1762\dots$
(Lehmer 1930)

Siegel 40: $\Theta>1$ mit $\Theta^3-\Theta-1=0$ kleinste Pisot-Zahl
(α P-Z : $\alpha>0$ und $|\alpha'|<1$ für alle $\alpha'\sim\alpha$)

Smith 70: $P_\alpha(x) \neq x^{\deg P_\alpha} P_\alpha(\frac{1}{x}) \Rightarrow h(\alpha)\geq\Theta$.

Statt Einheiten Regulatoren nach unten abschätzen
(mehr Struktur weil Volumen einer Fundamentalmasche von Gittern — geometrische Methoden)