Wiles veut montrer donc :

si $\rho$ satisfait aux hypoth. de Fontaine–Mazur

+ $\bar\rho$ mod $l$ (n'importe quel $l$) modulaire,

$\Rightarrow$ $\rho$ modulaire.

En fait qu'il montre est plus faible, mais suffit pour en déduire :

E semi-stable $\Rightarrow$ E modulaire.

---

La démarche de Wiles : Soit $\bar\rho : G \to Gl_2(\bar{\mathbb{F}}_\ell)$ irred., impair

1) décrire les lift : $\tilde\rho : G \to R$ ( algèbre sur $\mathbb{Z}_\ell$ noethérienne, complète )

Mazur : – il faut considérer lifts de type $\Sigma$ ( $\Sigma$ ens. fini de premiers

type $\Sigma$ : bon comportement en $p \in \Sigma$ et ramif. restr. pour $p \notin \Sigma$)

– il existe $\rho_{\Sigma_1, \text{univ.}} : G \to Gl_2(R_{\Sigma_1})$

tel que pour chaque lift $\tilde\rho$ de type $\Sigma_1$ il existe morph. $R_{\Sigma_1} \xrightarrow{\varphi} R$ et

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\rho_{\Sigma_1, univ}"] \arrow[rr, bend right, "\rho"'] & Gl_2(R_\Sigma) \arrow[r, "``\varphi''"] & Gl_2(R) \end{tikzcd}$$

i.e. lift $\tilde\rho$ de type $\Sigma_1$ $\approx$ $Hom(R_{\Sigma_1}, R)$
dans $Gl_2(R)$

( $R_{\Sigma_1}$ = anneau de déformation universelle )

Wiles construit analogue :

$$\rho_{\Sigma_1, \text{mod}} : G \to Gl_2(\mathbb{T}_{\Sigma_1})$$

pour décrire les lifts modulaires

( $\mathbb{T}_{\Sigma_1}$ $\approx$ algèbre dépendant de Hecke sur un certain espace de forme mod.)

Prop. universelle $\Rightarrow$ $R_{\Sigma_1} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{T}_{\Sigma_1}$.