Shimura-Taniyama conjecture :

Soit $\rho_{E,\ell} : \underbrace{Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})}_{=:G} \longrightarrow GL_2(\mathbb{Q}_\ell)$ obtenu par l'action de G sur $T_E(\ell) = \varprojlim E[\ell^n]$

On a $\rho_{E,\ell} \bmod \ell \simeq \rho$

ST-conjecture : $\rho_{E,\ell} \overset{(*)}{=} \rho_{f,\ell}$ $f \in S_2(N)$ (N conv.)

Fontaine-Mazur conjecture : $\rho : G \to GL_2(E_\lambda)$, $E_\lambda/\mathbb{Q}_\ell$ fini, irred. impair + "$\rho|I_\ell$ etc." $\Rightarrow \rho$ modulaire

Ribet : Si $(*)$ est vrai, alors Serre's conjecture est vrai pour ρ ~~on peut choisir $k = N = 2$~~

~~t.q. $\rho_{f,\ell} \bmod \ell \simeq \rho$~~

Donc à montrer $\rho_{E,\ell}$ modulaire

pour cela il suffit : $\rho_{E,p}$ modulaire pour un p convenable

connue : $\rho : G \longrightarrow GL(\mathbb{F}_p)$ irred., impair $\Rightarrow$ ρ modulaire

pour $p = 2$ (Hecke

$p = 3$ (Langlands-Tunnel : (formule de trace)

"$\rho : G \to GL_2(\mathbb{C})$ irr. impaire, $\operatorname{Im}\rho$ résoluble

$\Rightarrow \rho = \rho_f$ pour $f \in S_1(N,\chi)$ convenable"

+ $GL_2(\mathbb{F}_3)$ résoluble et

$GL_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]) \longrightarrow GL_2(\mathbb{F}_3)$ (mod $1+\sqrt{-2}$) possède une section)

$p = 5$ dans certains cas (d'après Wiles ?)

Donc idée : montrer : conjecture de Serre $\Rightarrow$ conj. de Fontaine-Mazur

($\rho : G \to GL(\mathbb{F}_3)$ associé à l'act de G sur $E[3]$ modulaire

$\Rightarrow \rho_{E,3}$ mod. $\Rightarrow \rho_{E,\ell}$ mod. $\Rightarrow$ Serre vrai pour ρ assoc. à $E[\ell]$ Ribet ~~modulaire~~)

pas 2 car l'action de Galois sur $E[2]$ est triviale (E courbe de Frey)