En partic. : $[r_1, \dots, r_n]_\ell \in$) zmod. $\Rightarrow$ pgcd$(r_1, \dots, r_n, \ell) = 1$

(si t = pgcd, alors $\max \max_{a \bmod^* t} \dots \geq \frac{n}{6}$, d'où $t = 1$)

Donc le problème se réduit ~~essentiellement~~ conduit au suivant :

Sur $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ pose

$$\beta_\ell([a_1 : \dots : a_n]) := \max_{a \bmod^* \ell \in (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{B}_2\left(\frac{a_j a}{\ell}\right).$$

<u>Déf</u> $P = [a_1 : \dots : a_n] \in \mathbb{P}$ pré-modulaire si

$$\beta_t(P \bmod t) \leq \frac{n}{6t^2} \quad \text{p.t. } t \mid \ell.$$

~~Avec un peu de géométrie de nombres on peut montrer~~

Exemple : $n = 1$, $\ell > 1$:

$$\beta_\ell([a]) = \mathbb{B}_2\left(\frac{1}{\ell}\right) \cancel{= \frac{4}{6\ell}}$$

et

$$\beta_\ell([a]) = \frac{1}{6\ell^2} \quad \text{ssi} \quad 5 - 6\ell + \ell^2 = 0, \text{ donc } \underline{\ell = 5}$$

$\rightsquigarrow$ Rogers-Ramanujan.

Avec un peu de géométrie de nombres :

<u>Thm.</u>

Si $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ contient un pt pré-modulaire, alors

$$\ell \leq \left(\frac{2(1 + \ell^{\frac{1}{n} - 1})}{1 - \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{3p^2}}}\right)^n \quad (p = \text{le pp diviseur premier divis. } \ell).$$

Ça entraîne le thm de finitude.