~~La démo donne~~ .

Corol. de la démo: algo pour déterminer tout ens. mod. dans $E_n(\ell)$ p. n,ℓ donné.

n	tout ens. mod. dans $E_n(\ell)$ p. tout ℓ
1	AG_5
2	AG_5^2 $\quad AG_7$
3	AG_5^3 $\quad W_7 := \{[1,2,3]_7\} \cup \{[1,1,3]\cdot r \mid r=1,2,3\}$ $\quad AG_9$

\+ réuni. de ces ens.

(~~$S=\{f_1,\dots,f_n\}$~~ $\rightsquigarrow S^k := \{f_1\cdots f_k \mid f_1,\dots,f_k \in S\}$ modulaire si S modulaire

Esquisse de la démo:

1. S = ens. de fonct. mod., $\langle S\rangle$ ($\subseteq$ esp. de $\mathrm{Fol}(g)$ eng. par S) stable par $SL(2,\mathbb{Z})$. Alors $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}) \ni s \mapsto \min_{f\in S} \operatorname{ord}_s(f)$ est constant.

($s = A\infty$, $A\in SL(2,\mathbb{Z})$, $f\circ A = (\neq 0)q^{\alpha} + O(q^{>\alpha})$, $\operatorname{ord}_s f := \alpha$)

Raison: fixer A,B: $f\circ A = \sum_{g\in S} * \, g\circ B$, d'où $\operatorname{ord}_\infty f\circ A \geq \min_{g\in S} \operatorname{ord}_\infty g\circ B$,

$\min_{f\in S} \operatorname{ord}_{A\infty} f \geq \min_{g\in S} \operatorname{ord}_{B\infty} g$)

2. Calculer $\operatorname{ord}_s([r]_\ell)$ (en utilisant $[r]_\ell$ = prod. exp. de pt. de torsion de σ)

3. Déduire de 1. et 2.

Prop. $S \subseteq E_n(\ell)$ modulaire, $S \notin E_{n-1}(\ell)$ $\Longrightarrow$

$$\max_{[r_1,\dots,r_k]_\ell \in S} \; \max_{a \bmod^* t} \; \sum_{j=1}^{k} B_2\left(\frac{r_j a}{t}\right) = \frac{n}{6t^2}. \qquad (\text{tout } t\mid\ell)$$