Facile à déterminer la structure de $\langle E_* \rangle = E$.

(★) $$[r]_\ell = \prod_{\substack{s \bmod m \\ s \equiv r \bmod \ell}} [s]_m \qquad \forall \ell \mid m$$

$$[r]_\ell = [-r]_\ell$$

Donc $[r]_\ell$ donne une "distribution" sur $\hat{\mathbb{Z}} = \varprojlim \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$,

$$L(\hat{\mathbb{Z}}) := \left\{ \begin{array}{l} \text{fonct. local.} \\ \text{constantes,} \\ 0 \text{ en } 0 \end{array} \right\} \ni f \rightsquigarrow [\;]^f = \prod_{r \bmod \ell} [r]_\ell^{f(r)}$$

(ℓ telle que f factorise à $\hat{\mathbb{Z}}/\ell\hat{\mathbb{Z}}$)

Thm. $f \mapsto [\;]^f$ ~~est isom.~~ induit iso de groupes

$$L(\hat{\mathbb{Z}}) \big/ L(\hat{\mathbb{Z}})_{\text{impair}} \xrightarrow{\sim} E.$$

Démo. ess. que les $(a(n))$ sont uniques. □

Pas classification des ensembles rat., mais thm de [illegible] Gaudi admet à énumérer algorithmiquement les s-ens. rationnels dans E_* ($\subseteq$ un peu plus petit E^+)

Poser $$E_n(\ell) := \left\{ [r_1, \dots, r_k]_\ell := \prod_{j=1}^{k} [r_j]_\ell \;\middle|\; r_j \in \mathbb{Z},\ \ell \nmid r_j,\ \boxed{k \leq n} \right\}$$

D'après (★) : $S \subseteq E_*$ rationnel. $\Rightarrow \exists n, \ell : S \subseteq E_n(\ell)$.

Donc suffit à regarder $E_n(\ell)$, chaque n, ℓ.

Thm. (Ehlozer – n)
Pour tout n le nombre des ℓ t.q. $E_n(\ell)$ contient un ens. rat. est fini.
(en fait : $E_n(\ell) \supseteq$ ens. rat. $\Rightarrow \ell \leq 13.7^n$)