(4)

Esquisse de la démo:

Lemme de clé

Soit f holom. dans $\mathfrak{H}$ et périodique (c.-à-d. sous $z \to z+1$) avec coeff. de Fourier $\in 1 + q\mathbb{Z}[[q]]$.
Alors il ex. une suite unique $(a(n))$ de nombres entiers t.q.

$$f = \prod_{n\geq 1} (1-q^n)^{a(n)} \quad \text{pour tout } |q| \text{ suff. petit.}$$

(Vraie pour $\mathbb{Z}$ rempl. par $R \subseteq \mathbb{C}$ sous-ann.)

Démo: Ex: Déf. de $a(n)$ par récurrence ~~sur n~~:

– supp. $g := f \Big/ \prod_{n\geq 1}^{N-1} (1-q^n)^{a(n)} = 1 + O(q^N)$

pose $a(N) := -(q^N\text{-coeff. de } g)$ ($\in \mathbb{Z}$!)

alors $g \big/ (1-q^N)^{a(N)} = 1 + O(q^{N+1})$.

unic.: considère $q\frac{d}{dq} f = -\sum \frac{a(n)\, n\, q^n}{1-q^n}$. $\square$

Cor. Soit $f \in \mathrm{Hol}(\mathfrak{H})$ t.q. $f^N \in \langle E_x \rangle$, alors $f \in \langle E_x \rangle$.

Démo $a(n)$ comme ci-dessus; $f^N \in E \Rightarrow N a(n)$ "factorise" à une fonction $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, donc $a(n)$ même prop., donc $f \in E$. $\square$

Thm (classique) $U \big/$ "valeurs des pts. de torsion de σ = fonction de Weierstr." = groupe de torsion

Idée. $f \in E \Rightarrow f \in U \Rightarrow \exists N\ f^N = \prod$("val. des ... pts. de tors. de σ")?

$G = \langle T\rangle/\langle T^\ell\rangle \rtimes \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_\ell)/\mathbb{Q})$ agit sur (classe gal)

$f \in q^s(1+q\mathbb{Z}[[q]]) \Rightarrow f$ "inv." sous G ~~$z \to z+1$~~ et G = ~~Gal(Q(μ)/Q)~~ ~~(classe)~~

$\Rightarrow \exists N' : f^{NN'} = \prod \underbrace{\Big(\prod_{k \bmod \ell,\ \tau\in G} (\text{valeurs de } \sigma^n \circ T^k)^{\tau}\Big)}_{\in \langle E_x \rangle}$? $\in \langle E_x \rangle$ ... Lemme.