(3)

Maintenant plus étonnant une <u>propriété bizarre</u> de

$$AG_\ell := \{\phi_1, \dots, \phi_{\frac{\ell-1}{2}}\}$$

<u>Déf.</u> $S \underset{\text{fini}}{\subseteq} E^+$ <u>modulaire</u> si span S $\left(\underset{\text{sous-esp}}{\subseteq} \mathfrak{Hol}(\mathfrak{H})\right)$

est stable sous $SL(2,\mathbb{Z})$.

<u>Prop.</u> AG_ℓ modulaire.

Donc on peut se poser :

<u>Question</u> Classifier ~~tels~~ ensembles modulaires. | comme Riemann-Roch
(bizarre: étrange mélange d'une condition multiplicative (diviseurs dans les pôles) et additive ($SL(2,\mathbb{Z})$-stab. esp. vect.), a plus naturell., découpe un morceau assez intéressant de les tâtons de ces multipl.) ... Riemann-Roch

<u>Exemple</u> : AG_ℓ + quelques d'autres, assez rares,

~~existence toujours liée à d'autres phén. non-triviaux.~~

~~bizarre: ϕ_i définies à partir de condit. sur des diviseurs liés. leurs stuct.~~

Premier pas : <u>description de E^+</u>. Difficile. Mais

$E := \{$unités mod. $\mid f \in q^s(1+q\mathbb{Z}[[q]])$ p.u. $s\} \underset{\text{sous-groupe}}{\subseteq} \mathcal{U}$

$E_* :=$ semi-groupe eng. par $\langle [r]_\ell \mid$ tous $r,\ell \rangle$.

<u>Thm (Elkies+...)</u> $\langle E_*\rangle \overset{(\subseteq)}{=} \langle E^+\rangle \overset{(\subseteq)}{=} E$ ~~$\langle E^+\rangle = \langle E_*\rangle = E$~~.

et vrai ..RR .. VOA

($\Rightarrow$ tout $f \in E^+$ est $\prod$ de puiss. entières des $[r]_\ell$).

~~Mais~~ $E_* \subsetneq E^+$: $[1]_q^2/[2]_q \in E^+ \setminus E_*$.

$$\sum_n q^{n^2}/\eta$$

2) ~~$AG_\ell \subseteq E_*$~~