Naivement on peut demander à ~~classifier~~ déterminer toutes les identités comme ça. ~~Plus précisément~~: Comme ça ?

Observation :

Prop. $[r]_\ell$ est fonction modulaire (i.e.: pour $q = e^{2\pi i z}$, $z \in \mathfrak{H}$, $\exists\ \Gamma$ s-gr. de congruence de $SL(2,\mathbb{Z})$: $[r]_\ell \circ A = [r]_\ell$, $[r]_\ell$ mérom. dans $\mathfrak{H} + \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$)

Démo $[r]_\ell = \dfrac{\text{série thêta}}{\eta}$ via "Jacobi-triple product identités" □

Donc

Question Classifier toutes $(A, b) \in (\mathbb{R}^{k\times k}, \mathbb{R}^k)$, $A^t = A$, $A \geq 0$ t.q.

(*) $$\sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}^k \\ m\geq 0}} \frac{q^{m^t A m + b m}}{(q)_{m_1} \cdots (q)_{m_k}} = \text{fonction modulaire.}$$

Réponse seulement connue pour $k = 1$ (Rh équiv. $\nabla D Z$)

(*) modul. ssi

A	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
b	$0, 1$	$0, \frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$	$0, \frac{1}{2}$
	R.-R.	Vir. min. $C(3,4)$ (Ising model)	Vir. minim. $\in C(3,5)$

Pas d'idée raisonnable pour cas général.

Donc regardons côté gauche de R.-R.

~~Observation $[r]_\ell$ pas de pôle~~

Soit $\mathcal{U}$ = Groupe d'unités modulaires (= fonct. mod. sans pôles ou zéros dans $\mathfrak{H}$; groupe via multipl. usuelle)

$E^+ = \{ f \text{ unit. mod.} \mid \exists s \in \mathbb{Q} : f \in q^s (1 + q\mathbb{Z}_{\geq 0}[[q]]) \}$

$E^+ \subseteq \mathcal{U}$ semi-sous groupe.

Prop. $[r]_\ell \in E^+$.