(~~(2)~~ · und 3.) impliziere durch Induktion:

~~Jedes~~ $f \in M_k(\Gamma_0(2))$ läßt sich als Polynom in ε, δ schreiben:

$$\left(\left(f - \frac{f(\infty)}{\varepsilon(\infty)^{k/2}}\varepsilon^{k/2} - \left\{\begin{matrix}\frac{f(0)}{\varepsilon(0)^{k/4}}\varepsilon^{k/4} \ldots \\ \frac{f(0)}{\varepsilon(0)^{\frac{k-2}{2}}\delta(0)}\varepsilon^{\frac{k-2}{4}}\delta\end{matrix}\right\}\right)\right) / \nabla \in M_{k-8}(\Gamma_0(2))$$

Schließlich gilt noch:

ε, δ sind algebraisch unabhängig

(Andernfalls: Sei P Glied kleinsten Grades, sodaß $P(\varepsilon, \delta) = 0$. Schreibe $P = a\varepsilon^m + \varepsilon\delta\, Q(\varepsilon,\delta) + b\,\delta^n$.
Dann für $\tau = \frac{i-1}{2}$ $\Rightarrow b\,\delta\left(\frac{i-1}{2}\right)^n = 0 \Rightarrow b = 0$ (einzige Nullstelle von δ $\bmod \Gamma_0$)
—— $\tau = \infty$ $\Rightarrow a\,\varepsilon(\infty) = 0 \Rightarrow a = 0$.
Also $Q(\varepsilon,\delta) = 0$ und $\deg Q < \deg P$ ↯.)

Somit <u>Satz</u> $M_*(\Gamma_0(2)) = \mathbb{C}[\varepsilon, \delta]$.

<u>Bemerkung:</u> $E_4(\tau), E_4(2\tau)$ sind $\in M_4(\Gamma_0(2))$. Also
$\varepsilon = * E_4(\tau) + * E_4(2\tau)$.
Wir kennen die FK von $E_4, E_4(2\tau)$ und die ersten von δ, daher

$$\delta = (E_4(\tau) - E_4(2\tau))/240 = \sum_{n \geq 1}^{\infty}\Big(\sum_{2 \nmid n/d} d^3\Big) q^n$$

$$\varepsilon\Big|\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = E_4(\tau) - \frac{1}{16}E_4\left(\frac{\tau}{2}\right) = \ldots = \frac{15}{16} + O(q^{1/2}).$$

<u>Übungsaufgabe</u> $M_*(Sl_2(\mathbb{Z})) = \mathbb{C}[E_4, E_6]$ (mit $\Delta \leftrightarrow \nabla$)

$$\boxed{\text{schwer: } \Delta = q \prod (1-q^n)^{24}}$$ $\neq$ leicht: $\Delta = (E_4^3 - E_6^2)/2^6 3^3$

$\nabla = \sqrt[3]{\Delta(\tau)}\,\sqrt[3]{\Delta(2\tau)}$ leicht: $\nabla = \varepsilon\left(\cancel{\delta} - \frac{1}{64}\frac{16}{15}\varepsilon\right)$

$\varepsilon(\varepsilon - \frac{15}{2}\delta)\frac{16}{15}$ ~~$= \varepsilon\left(\frac{2}{15}\varepsilon - 8\delta\right) = \frac{2\varepsilon(\varepsilon-60\delta)}{15}$~~