§ 3. Valenzformel

Satz Sei $k \in \mathbb{Z}$, $\Gamma \subseteq Sl_2(\mathbb{Z})$ endl. ~~Index~~, $f \in M_k(\Gamma)$, $\boxed{f \neq 0}$. Dann gilt:

$$(*) \sum_{s \in \Gamma \backslash P_1(\mathbb{Q})} [PSl_2(\mathbb{Z})_s : P\Gamma_s] \operatorname{ord}_s(f) + \sum_{\tau \in \Gamma \backslash \mathfrak{H}} \frac{1}{|P\Gamma_\tau|} \operatorname{ord}_\tau f = [PSl_2(\mathbb{Z}) : P\Gamma] \frac{k}{12}$$

Bem. $s \in P_1(\mathbb{Q})$, so sei $A \in Sl_2(\mathbb{Z})$ mit $s = A\infty$, dann $f(A\tau) = c \cdot e^{2\pi i \varepsilon \tau} + O(e^{2\pi i \varepsilon \tau})$ (für $\tau \to \infty$) ~~für~~ $c \neq 0$. klein.

Def. $\operatorname{ord}_s(f) := \varepsilon$.

Beachte: für $\tau \in \mathfrak{H} \cup \mathbb{Q} \cup \infty$ hängt $\operatorname{ord}_\tau f$ nur von τ mod Γ ab. ~~(oder nicht klar ist)~~ ~~von (*) Sinn.~~

Übungsaufgabe: Ist $\tau \in \mathfrak{H}$, und ex. $A \neq \pm 1$ $\in Sl_2(\mathbb{Z})$ mit $A\tau = A$, so ist $\tau \equiv i, e^{2\pi i/3} (Sl_2(\mathbb{Z}))$ und $|PSl_2(\mathbb{Z})_i| = 2$, $|PSl_2(\mathbb{Z})_{e^{2\pi i/3}}| = 3$.

Korollar $\dim M_k(\Gamma) < \infty$ (Betrachte $M_k(\Gamma) \longrightarrow \mathbb{C}^N$, $f \to (f(\tau_1), \dots, f(\tau_N))$, $\tau_1, \dots, \tau_N$ paarw. versch. Punkte in $\mathfrak{H}$. Für $N \gg 0$ ist dies injektiv wegen (*)).

$M_k(\Gamma) = 0$ für $k < 0$ (rechte Seite von (*) < 0 für $k < 0$, linke Seite aber stets ≥ 0)

$M_0(\Gamma) = \mathbb{C}$ ($f(\tau) - f(\tau_0)$ ist ~~identisch~~ $\equiv 0$ oder hat NS, letzteres im Widerspruch zu (*))

§ 4. Die ~~Anzahl~~ Ringe $M_*(\Gamma_0(2))$ und $M_*(Sl_2(\mathbb{Z}))$

$M_*(\Gamma) := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} M_k(\Gamma)$ ist graduierter Ring.

Wir studieren zunächst den Fall $\cancel{\Gamma =} \Gamma_0(2))$

Valenzformel für $\Gamma_0(2)$:

Sei ~~$\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ($(p,q) = 1$). Bestimme~~ $b, d \in \mathbb{Z}$ mit $pd - bq = 1$, Dann $A := \begin{pmatrix} p & b \\ q & d \end{pmatrix} \in Sl_2(\mathbb{Z})$.
Ist ~~q gerade~~, so $\frac{p}{q} = A\infty$. Ist q ungerade, so löse (*) mit gerade d. Dann ist