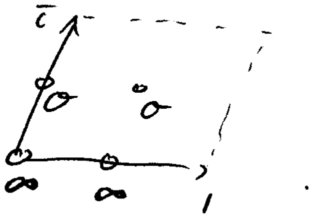
Für die elliptische Geschlechter wichtig ist noch: (v)

<u>Satz</u> Für jedes $\tau \in \mathfrak{H}$ sei $\varphi(\tau,\cdot)$ die bzgl. $\mathbb{Z}\tau+\mathbb{Z}$ doppelper. Fkt. mit

$$(*)\quad \begin{cases} \text{Polen bei } \mathbb{Z}\tau + \frac{1}{2}\mathbb{Z} \\ \text{Nullstelle bei } \frac{\tau}{2} + \mathbb{Z}\tau + \frac{1}{2}\mathbb{Z} \\ \varphi(\tau,z) = \frac{1}{z} + O(1) \quad (z \to 0) \end{cases}$$



Dann gilt

1.) $\varphi\left(A\tau, \frac{z}{c\tau+d}\right)(c\tau+d)^{-1} = \varphi(\tau,z) \quad \forall A \in \Gamma_0(2)$

2.) $\varphi(\tau,z)^2 = \wp(2\tau,2z) - \wp(2\tau,\tau) \; (= \wp(2\tau,2z) - e_2(2\tau))$

(oder $\left(\varphi\left(\frac{-1}{\tau},\frac{z}{\tau}\right)\tau^{-1}\right)^2 = \wp\left(\frac{\tau}{2},z\right) - e_1\left(\frac{\tau}{2}\right)$.)

3.) $\varphi(\tau,z) = \frac{4\pi i}{\zeta-\zeta^{-1}} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{\frac{(1-q^n)^2}{(1-q^n\zeta^2)(1-q^n\zeta^{-2})}\right\}^{(-1)^n}$

4.) $\varphi(\tau,z) = 4\pi i \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{q^n\zeta - q^{-n}\zeta^{-1}}$,

~~Beweis~~ insbesondere $\varphi(\tau,z) = \frac{4\pi i}{\zeta-\zeta^{-1}} - \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{\substack{d|n \\ d \text{ ungerade}}} (\zeta^d - \zeta^{-d})\Big) q^n$

(für $|q|<|\zeta|<|q|^{-1}$).

<u>Beweis</u> ~~Es gilt nun~~ φ ist durch $(*)$ eindeutig bestimmt. Die rechte Seite von 3),4) definieren Funktionen ~~mit~~ $(*)$, also sind sie gleich φ. Zu 1.) $\tilde\varphi(\tau,z) = \varphi\left(A\tau,\frac{z}{c\tau+d}\right)(c\tau+d)^{-1}$ erfüllt $(*)$, ist also gleich φ (Beweis durch Nachrechnen, z.B.: Pole von $\tilde\varphi(\tau,z)$ bei $\frac{z}{c\tau+d} \in \mathbb{Z}A\tau + \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, d.h. $z \in \mathbb{Z}(a\tau+b) + \frac{c\tau+d}{2}\mathbb{Z} = \mathbb{Z}\tau + \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ für $A \in \Gamma_0(2)$. etc.)

Zu 2.) $-\varphi(\tau,-z)$ erfüllt $(*)$, also $\varphi(\tau,z)$ ungerade in z; ~~also~~ und $\varphi(\tau,z+\frac{1}{2})$ erfüllt $(*)$, also ungerade, also $\psi(\tau,z) := \varphi(\tau,z) + \varphi(\tau,z+\frac{1}{2})$ ungerade und periodisch mit P.gitter $\mathbb{Z}\tau+\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ und Pole bei $\mathbb{Z}\tau+\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ und Ordnung höchstens 1, also $\equiv 0$. Also $\varphi(\tau,z+\frac{1}{2}) = \varphi(\tau,z)$, also $\varphi(\tau,z)^2$ gerade und Gitter $\mathbb{Z}\tau+\frac{1}{2}\mathbb{Z}$, Polen in Gitter und Ordnung 2, also $= \wp(2\tau,2z) - \mathrm{const}(\tau)$. Setze $z=\tau \Rightarrow \mathrm{const} = e_2(2\tau)$. $\square$