<u>Satz</u> Die ~~konstanten~~ Glieder der Taylorentw. von $\wp(\tau, z)$ um die primitiven Zweiteilungspunkte, d.h. die Fkt. $e_1(\tau) = \wp(\tau, \frac{1}{2})$, $e_2(\tau) = \wp(\tau, \frac{\tau}{2})$, $e_3(\tau) = \wp(\tau, \frac{\tau+1}{2})$ sind Modulformen vom Gewicht 2 auf $\Gamma_0(2)$, $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\Gamma_0(2)\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}^{-1}$, $\begin{pmatrix}0&-1\\1&1\end{pmatrix}\Gamma_0(2)\begin{pmatrix}0&-1\\1&1\end{pmatrix}$ respektive.

Die $|_2$-Op. von $SL_2(\mathbb{Z})$ auf den Fkt. e_1, e_2, e_3 permutiert.

Es gilt

$$\cancel{e_1(\tau) = \frac{(2\pi i)^2}{6}\Big(1 + 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1^{odd}(n)\, q^n\Big)} \qquad \delta = -\frac{1}{8} - 3 \sum \sigma_1^{odd}(n)\, q^n$$

$$e_2(\tau) = e_1|\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix} = \frac{(2\pi i)^2}{12}\Big(1 + 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1^{odd}(n)\, q^{n/2}\Big)$$

$$e_3(\tau) = e_1|\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix} = \frac{(2\pi i)^2}{12}\Big(1 + 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1^{odd}(n)(-1)^n\, q^{n/2}\Big).$$

Bei der "$\wp$"-Op. permutiert $SL_2(\mathbb{Z})$ die Fkt. e_1, e_2, e_3. ~~Insbesondere ist daher~~ Insbesondere ist daher: $\delta := \frac{48}{(2\pi i)^2} e_1 = -\frac{1}{8} - \frac{1}{3} q + \dots \in M_2(\Gamma_0(2))$, wobei e_1 unter $\Gamma_0(2)$ invariant bleibt.

$$E := \frac{1}{16(2\pi i)^2}(e_2 - e_3)^2 = q + 8q^2 + 28q^3 + \dots \in M_4(\Gamma_0(2))$$

$$\nabla := \frac{1}{28 \times (2\pi i)^4}(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)^2 \in M_8(\Gamma_0(2))^{cusp}$$
$$= q + \dots$$

$$\Delta = \frac{1}{2^{12}(2\pi i)^6}(e_1 - e_2)^2(e_1 - e_3)^2(e_2 - e_3)^2 = q - 24q^2 + \dots \in M_{12}(SL_2(\mathbb{Z}))^{cusp}.$$

<u>Beweis</u> Mit vorstehendem Satz.

<u>Bem.</u> Ein $f \in M_k(\Gamma)$ heißt Spitzenform, falls $(f|A)(\tau) \to 0$ für alle $A \in SL_2(\mathbb{Z})$. $M_k(\Gamma)^{cusp} :=$ Raum der Spitzenformen.

Deutung: Ist $r \in \Gamma\backslash\mathbb{P}_1(\mathbb{Q})$ Spitze, sowie $f \in M_k(\Gamma)$. Ist $A \in SL_2(\mathbb{Z})$, sodass $A\infty = r$, so ~~heißt $f|A$ = Entw.~~ hängt $f|A$ von der speziellen Wahl von A ab, <u>nicht</u> aber $\lim_{v\to\infty}(f|A)(iv)$ (=: Wert von f in der Spitze r).