Beweis. Die rechte Seite von (*) definiert bei festem τ eine Fkt $\varphi(z)$, die für z periodisch mit Periodengitter $\mathbb{Z}\tau+\mathbb{Z}$ ist, Pole genau bei $\mathbb{Z}\tau+\mathbb{Z}$ hat und zwar von zweiter Ordnung und $\varphi(z) = \frac{1}{z^2} + O(z^2)$ (für $z \to 0$) erfüllt. Also $\varphi(z) = \wp(\tau, z)$ (~~Andernfalls wäre~~ Es ist $\varphi(z) - \wp(\tau,z)$ holom., $\in \mathbb{Z}$, periodisch und $= O(z^2)$ für $z \to 0$, ~~Jede doppelt periodische Fkt. hat Pole~~ also überhaupt 0).

Als Folgerung bekommen wir hieraus sofort

Satz. Für $k>1$ ist

$$E_{2k} \left(= \frac{1}{2} \sum_{A \in \begin{pmatrix}1&\mathbb{Z}\\0&1\end{pmatrix} \backslash SL_2(\mathbb{Z})} 1|_{2k} A \right) = 1 - \frac{4k}{B_{2k}} \sum \sigma_{2k-1}(n)\, q^n \qquad (q = e^{2\pi i \tau}).$$

(Dabei B_{2k} = 2k-te Bernoullizahl: $\frac{x}{e^x-1} = \sum \frac{B_n}{n!} x^n$)

Die ersten Fälle:

k	(2)	4	6	8	10	12	14
$-\frac{4k}{B_{2k}}$	-24	240	-504	480	-264	$\frac{65520}{691}$	-24

Beweis ~~Unmittelbar aus~~

Es ist

$$\wp(\tau, z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{k=2 \\ k \text{ gerade}}}^{\infty} \frac{z^k}{k!} (k+1)! \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{Z}\tau+\mathbb{Z} \\ \gamma \neq 0}} \frac{1}{\gamma^k},$$

aber

$$\sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{Z}\tau+\mathbb{Z} \\ \gamma \neq 0}} \frac{1}{\gamma^{2k}} = \sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \\ (m,n) \neq 0}} \frac{1}{(m\tau+n)^{2k}} = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d^{2k}} \sum_{(c,d)=1} \frac{1}{(c\tau+d)^{2k}} = 2\zeta(2k)\, E_{2k},$$

also $E_{2k} = \frac{k+1}{2\zeta(2k)} \times$ (2k)-ter Koeff der Entwicklung um $z=0$. Nun Berechne diesen Koeff. mit der zweiten Formel des ~~Wortes~~ vorstehenden Satzes.

Korollar zum Beweis

$$\zeta(2k) = (-1)^{k-1} \frac{2^{2k-1}}{(2k)!} B_{2k} \times \pi^{2k}.$$