(ii)

Beweis

$$g(\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\varepsilon} \frac{\phi(\tau, z+\varrho(\tau))}{z^{n+1}}\,dz \qquad \text{wo } \varrho(\tau) = \lambda\tau+\mu .$$

Also

$$(g|A)_{k+n}(\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\varepsilon} \frac{\phi(A\tau, z+\varrho(A\tau))\,(c\tau+d)^{-k}}{[(c\tau+d)^{-1} z]^{n+1}}\, d(c\tau+d)^{-1} z$$

und nach Vorauss. (ii) über ϕ:

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=\varepsilon|c\tau+d|} \frac{\phi(\tau, (c\tau+d)z + \varrho(A\tau)(c\tau+d))}{w^{n+1}}\,dw \qquad (w = (c\tau+d)z)$$

und nach Vorauss. (i) und $\varrho(A\tau)(c\tau+d) \equiv \varrho(\tau) \bmod \mathbb{Z}\tau+\mathbb{Z}$:

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=\varepsilon|c\tau+d|} \frac{\phi(\tau, w+\varrho(\tau))}{w^{n+1}}\,dw$$

also

$$= g(\tau).$$ (Wir nehmen an, daß $\varepsilon>0$ klein genug war: also so klein, daß $\phi(\tau, z+\varrho(\tau))$, $\phi(A\tau, z+\varrho(A\tau))$ keine Pole in $0<|z|<\varepsilon$ und $\phi(\tau, w+\varrho(\tau))$ keine Pole in $0<|w|<\varepsilon|c\tau+d|$.) $\square$

Wir illustrieren das ganze mit dem oben erwähnten Beispiel $\wp(\tau,z)$:

Satz Es gilt

$$\wp(\tau,z) \left(:= \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{\gamma\in\mathbb{Z}\tau+\mathbb{Z}\\ \gamma\neq 0}} \left(\frac{1}{(z-\gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2}\right)\right) =$$

$$= (2\pi i)^2 \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(q^{n/2}\zeta^{1/2} - q^{-n/2}\zeta^{-1/2})^2} + \frac{1}{12} - \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} \frac{1}{(q^{n/2}-q^{-n/2})^2} \right)$$

$$\cancel{= (2\pi i)^2 \left(\frac{d}{d\,2\pi i z} \frac{\ }{1-\zeta} + \sum_{n=1}^{\infty}\right)}$$

$$= (2\pi i)^2 \left(\frac{1}{\zeta+\zeta^{-1}-2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{d|n} d(\zeta^d+\zeta^{-d})\right) q^n + \frac{1}{12} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{d|n} d\right) q^n \right)$$

(für $\zeta = e^{2\pi i z}$, $q = e^{2\pi i \tau}$ und $|q|^2 < |\zeta| < |q|^{-2}$, d.h. $-\operatorname{Im}\tau < \frac{\operatorname{Im} z}{2}\ldots$)