Über Modulformen II in Hirzebruch: Elliptic genera Winter/Frühjahr 87/88 (1)

Satz Gegeben sei eine Fkt. $\phi : \mathfrak{H} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, sodaß

(i) $\phi(\tau, \cdot)$ für jedes fest gewählte $\tau \in \mathfrak{H}$ eine doppeltperiodische Fkt. bzgl. des Gitters $\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$ ist

(ii) es gibt ein $k \in \mathbb{Z}$ und $\Gamma \underset{\text{endl. Index}}{\subseteq} SL_2(\mathbb{Z})$, sodaß

$$\phi\left(A\tau, \frac{z}{c\tau+d}\right)(c\tau+d)^{-k} = \phi(\tau, z).$$

Für $n \in \mathbb{Z}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ bezeichne $g(\tau)$ n-te Koeffizient der Taylorentwicklung von $\phi(\tau, \cdot)$ um $\lambda\tau + \mu$.
Dann gilt

$$g|_{k+n} A = g \quad \text{für alle } A \in \Gamma, \text{ sodaß } (\lambda, \mu) A \equiv (\lambda, \mu) \bmod \mathbb{Z}^2.$$

Bezeichnung. Eine Fkt. ϕ wie im Satz heißt (meromorphe) Jacobiform vom ~~Grad k~~ Gewicht k, Index 0 auf Γ.

Beispiel $\wp(\tau, z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}}' \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$ ist Jac.-Form vom Gewicht 2, Index 0 auf $SL_2(\mathbb{Z})$.

Setzen wir

$$e_1(\tau) = \wp(\tau, \tfrac{1}{2}), \quad e_2(\tau) = \wp(\tau, \tfrac{\tau}{2}), \quad e_3(\tau) = \wp(\tau, \tfrac{\tau+1}{2}),$$

so ist

$$e_1|_2 A = e_1 \quad \text{für alle } A \in \Gamma_0(2) \quad \left(A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : (0, \tfrac{1}{2}) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv (0, \tfrac{1}{2}) \bmod \mathbb{Z} \Leftrightarrow c \equiv 0 \bmod 2 \right).$$

Ferner $e_1 | A = \wp\left(\tau, \frac{c\tau+d}{2}\right)$ für bel. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A \in SL_2(\mathbb{Z})$, also $e_1 | \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = e_2$, $e_1 | \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = e_3$.

~~Insbesondere~~ Allgemein: $e_i | A = e_j$ $(j = j(i, A))$ für $A \in SL_2(\mathbb{Z})$.

$$\cancel{\Delta := (e_1 - e_2)^2 (e_1 - e_3)^2 (e_2 - e_3)^2}$$

Wir werden gleich sehen, daß jedes e_i holomorph ist und eine Fourierentwicklung der Gestalt $1 + O(e^{\pi i \tau})$ $(\tau \to i\infty)$. Also sind die e_i Mod-Formen

$\cancel{e_i \in M_2(\Gamma_0(2))}$, vom Gewicht 2.

$$\Delta := (e_1 - e_2)^2 (e_1 - e_3)^2 (e_2 - e_3)^2 \in M_{12}$$