3) Pôles de $L(f,s)$

4) Prob. d'inversion : $D(s)$ série Dirichl., se prolonge à $\mathbb{C}$ (à funct hol.), satisf. à ~~funct.~~ équat. fonctionelle ci-dessus)

$\Rightarrow \exists f \in S_k(\Gamma_2) : D(s) = L(f,s)$?

Pour étudier ces questions :

Funct. mod. de genre 2 triviales ~~et intéressantes~~ !

deux types

~~Th~~) séries Eisenstein à la Klingen

(Klingen)

Th 1) $S_k(\Gamma_1) \ni f \longmapsto kf = \sum_{g \in \Sigma \backslash \Gamma_2} \tilde{f}|_k g \quad (\tilde{f}(\tau, z, \tau') = f(\tau))$

définit

$S_k(\Gamma_1) \hookrightarrow M_k(\Gamma_2)$. ~~tel~~ On a $f_0 = f$.

2) ~~tel~~ : f fpH alors kf fpH et

$L_{kf}(s) = L_f(s) L_f(s-k+2)$

~~Th (Saito-Kurokawa-Maaß)~~ Corollaire $M_k(\Gamma_2) = S_k(\Gamma_2) \oplus k S_k(\Gamma_1) \oplus \mathbb{C} V \mathbb{I} (E_{k,1})$

~~Soit $f \in S_{2k-2}(\Gamma_1)$ fpH, alors il existe~~

~~Th. (Kohnen-Zagier-...)~~

~~$\phi \in J_{k,1}(\Gamma_1)$ fpH, alors il exist $f \in S_{2k-2}(\Gamma_1)$ fpH avec mêmes val. propre comme ϕ, et inversement.~~

Th. (Saito-Kurokawa-Maaß)

~~Soit $f \in V\phi$ ($\phi \in J_{k,1}(\Gamma_1)$)~~

Soit $f \in M_k(\Gamma_2)$ fpH, soit $f \in V \phi_{1}(\Gamma_1)$ ~~pour un $\phi \in J_{k,1}(\Gamma_1)$~~.

Alors il ex. $g \in M_{2k-2}(\Gamma_1)$ f.p.H t.q.

$$L(f,s) = L(g,s)\, L(E_2, s-k+2)$$

Inversement pour tout g — $\exists f$ t.q. —