(4)

Théorème (Andrianov)

$M_k(\Gamma_2)$ possède une base des fonctions propres simultanées pour les $T(\ell)$ $(\ell = 1, 2, \ldots)$ $(=$ fp H$)$

Soit f une ~~fonct. propre sim.~~ fp H, $T(\ell) f = \lambda(\ell) f$, alors la fonction

$$Z_f(s) = \zeta(2s-2k+4) \sum \frac{\lambda(\ell)}{\ell^s}$$

1) possède un prod. d'Euler

$$L_f(s) = \prod_p Q_p(p^{-s})^{-1}$$

avec

$$Q_p(X) = \left(1 - \left(\frac{\lambda(p)}{2} + \sqrt{d_p}\right) X + p^{2k-3} X^2\right) \cdot \left(\qquad - \qquad \right)$$

et

$$d_p = -\frac{3}{4}\lambda(p)^2 + \lambda(p^2) + p^{2k-4} + 2p^{2k-3}$$

2) $Z_f(s)$ converge abs. pour $\mathrm{Re}(s) \gg 0$, ~~possède un~~ se prolonge analytiquement en une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$

$$L_f^*(s) = (2\pi)^{-2s}\,\Gamma(s)\,\Gamma(s-k+2)\,L_f(s) = (-1)^k L_f^*(2k-2-s).$$

Remarque 1) Les $\lambda(\ell)$ ~~nombres entiers~~ algébriques ~~ent.~~ réelles

2) Il existe une formule qui donne une relation entre les coefficients de Fourier et valeurs propres : coeffic. $\approx$ valeurs propres proportionnels

~~Problèmes ouverts~~

Questions naturelles 1) Exemples (séries d')

2) ~~Multiplicité 1~~ : Une fp H uniqu. déterminée par les val. propres ?

5) Croissance des $\lambda(\ell)$?

3) Pour quelles fp H ~~action~~ satisfont les Q_p à la conj. de Ramanujan-Petersson : $Q_p(\xi) = 0 \Rightarrow |\xi| = p^{3/2-k}$? $\Big\} \approx \Big\{$ racines de $Q_p(X)$ sont-ils complexes ?

(Cas : f fp H $\in S_k(\Gamma_1)$: $|\lambda(\ell)| < 2p^{k-1} \Leftrightarrow |\text{racine de } Q_p(X)| = p^{k-1/2}$)