① **Notions de Base**

Formes modulaires de genre 2 : Introduction et problèmes ouverts

demi-plan de genre 2

$$\mathfrak{H}_2 = \left\{ Z = \begin{pmatrix} \tau & z \\ z & \tau' \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2} \;\middle|\; \operatorname{Im} Z > 0 \right\}$$

matrice Z définie positive

Groupe modulaire de genre 2

$$\Gamma_2 = \left\{ g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{4\times 4} \;\middle|\; g^t \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

opération de Γ_2 sur $\mathfrak{H}_2$

$$(g, Z) \longmapsto gZ = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}$$

(Lemme : $CZ+D$ inversible)

$\sim$ sur des fonctions $f : \mathfrak{H}_2 \to \mathbb{C}$

$$(f, g) \longmapsto f|_k g = f(gZ) \det(CZ+D)^{-k} \quad (k \text{ entier})$$

espace des formes modulaires de genre 2 de poids k

$$M_k(\Gamma_2) = \left\{ f : \mathfrak{H}_2 \xrightarrow{\text{holomorphe}} \mathbb{C} \;\middle|\; f|_k g = f \;\; \forall g \in \Gamma_2 \right\}$$

$$S_k(\Gamma_2) = \left\{ f \in M_k(\Gamma_2) \;\middle|\; \lim_{\tau' \to \infty} f(\tau, 0, \tau') = 0 \right\}$$

analogue : $M_k(\Gamma')$ avec $\Gamma' \underset{\text{fini}}{\subseteq} \Gamma_2$ d'indice fini

complètement analogue au cas des formes modulaire de genre 1

$\mathfrak{H} = \{\operatorname{Im} \tau > 0\}$, $\Gamma_1 = Sl_2(\mathbb{Z})$, $M_k(\Gamma_1)$

__l'algèbre graduée__ somme directe

$$M_*(\Gamma_2) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} M_k(\Gamma_2), \quad M_{2*}(\Gamma_2) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} M_{2k}(\Gamma_2)$$

analogue au $M_*(\Gamma_1) = \mathbb{C}[E_4, E_6]$

$$\left(E_{2k} = 1 - \frac{4k}{B_{2k}} \sum_{\ell \geq 1} \sigma_{2k-1}(\ell)\, q^\ell, \; q = e^{2\pi i \tau} \right)$$

__Lemme__ On a $M_4(\Gamma_2) = \mathbb{C}\psi_4$, $M_6(\Gamma_2) = \mathbb{C}\psi_6$, $S_{10}(\Gamma_2) = \mathbb{C}\chi_{10}$, $S_{12}(\Gamma_2) = \mathbb{C}\chi_{12}$ (Description sous-dessous)

__Théorème__ (Igusa)

$$M_{2*}(\Gamma_2) = \mathbb{C}[\psi_4, \psi_6, \chi_{10}, \chi_{12}].$$

($\psi_4, \ldots, \chi_{12}$ algébriquement indépendantes)