Hecke-Operatoren $T(\ell) : M_k(\Gamma) \circlearrowleft$ $(\ell = 1, 2, \ldots)$

$$a_{T(\ell)f}(n) = \sum_{\substack{d \mid \ell, n \\ (d,m)=1}} d^{k-1} a_f\left(\frac{\ell n}{d^2}\right)$$

$$\mathcal{H} = \mathrm{Spann}_{\mathbb{Q}} \langle T(\ell) \mid (\ell, m) = 1 \rangle$$

Satz: $\mathcal{H}$ komm. halbeinf. Algebra

$M_k(m) = M_k^{Eis}(m) \oplus S_k(m)$

$S_k(m) = \bigoplus V$ (kanonische Zerlegung)

$S_k^{neu}(m) = \bigoplus\limits_{\dim V = 1} V$

$S_k^{alt}(m) = \bigoplus\limits_{\dim V > 1} V$

$M_k^{Eis}(m)$: "trivial" : Prototyp: $E_4 = 1 + 240 \sum_{\ell=1}^{\infty} \left(\sum_{d \mid \ell} d^3\right) q^\ell \in M_4^{Eis}(1)$

$S_k^{alt}(m)$: trivial aus $S_k^{neu}(m')$ $(m' \mid m)$ konstruierbar

$$\mathcal{H}^{neu} := \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}} \langle T(\ell)|_{S_k^{neu}(m)} \mid \text{alle } \ell = 1, 2, \ldots \rangle$$

Satz $\mathcal{H}^{neu}$ kommut. halbeinfach

Folgerung: $\mathcal{H}^{neu}$ gilt eine Isomorphismus

$$\phi : \mathcal{H}^{neu} \xrightarrow{\simeq} K_1 \amalg \ldots \amalg K_r,$$

wo $K_j = \mathbb{Q}[X]/(p_j)$ mit geeign. $p_j \in \mathbb{Q}[X]$ ~~, $p_j = X^n +$~~ .

Sei $\phi(T(\ell)) = (a_1(\ell), \ldots, a_r(\ell))$, sei $F_j = \sum_1^{\infty} a_j(\ell) q^\ell \ (\in K_j[[q]])$

Seien $\sigma_{j,h} : K_j \hookrightarrow \mathbb{C}$ die Einbettungen $(1 \leq h \leq [K_j : \mathbb{Q}])$,

dann ist

$\sigma_{j,h}(F_j)$ $(1 \leq j \leq r,\ 1 \leq h \leq [K_j : \mathbb{Q}])$ Basis von $S_k^{neu}(m)$.

Ziel: Zu geg. k, m Tabellierung aller p_j und $\{a_j(\ell)\}_{1 \leq \ell \leq \text{"top"}}$