 Saarbrücken, 14.12.92

Wie berechnet man Modulformen

Modulformen

$\mathfrak{H}$, $SL(2,\mathbb{R})$, $(A,\tau) \longmapsto A\tau = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$

$\Gamma \subseteq SL(2,\mathbb{Z})$ endl.

$$M_k(\Gamma) = \Big\{ f : \mathfrak{H} \xrightarrow{\text{hol}} \mathbb{C} \ \Big| \ \begin{array}{l} 1)\ f(A\tau)(c\tau+d)^{-k} =: f|A(\tau) = f(\tau) \quad \forall A \in \Gamma \\ 2)\ f|A = O(1) \ (\mathrm{Im}\,\tau \to \infty) \quad \forall A \in SL(2,\mathbb{Z}) \end{array} \Big\}$$

$S_k(\Gamma) = \{$ — $= o(1)$ .. $\}$

$k = 2, 3, 4, 5, \ldots$

$\dim M_k(\Gamma) < \infty$

Wir betrachten nur $\Gamma = \begin{cases} \Gamma_1(m) = \{ A \in SL(2,\mathbb{Z}) \mid A \equiv \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bmod m \} \\ \Gamma_0(m) = \{ \quad \text{—} \quad A \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \bmod m \} \end{cases}$

Satz $M_k(\Gamma_1(m)) = \bigoplus_{\substack{\chi \text{ Dirichlet} \\ \text{charakter} \\ \text{mod } m}} M_k(m, \chi)$, wo

$$M_k(m,\chi) = \Big\{ f \in M_k(\Gamma_1(m)) \ \Big| \ f|A = \chi(d) f \quad \forall A \in \Gamma_0(m),\ A = \begin{pmatrix} * & * \\ * & d \end{pmatrix} \Big\}.$$

Beweis: $A \to d \bmod m$ induz. $\Gamma_0(m)/\Gamma_1(m) \to (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$. $\square$

Also: $M_k(m,\chi)$ interessant, wir behandeln sogar nur

a) $M_k(m) = M_k(\Gamma_0(m))$ (χ = „trivial")

b) $M_k\left(m, \left(\frac{(-1)^k m}{\cdot}\right)\right)$, wo $(-1)^k \cdot m$ fundamental Diskriminante

Alles was ich über Berechnung erzähle ist mut. mut. richtig für beliebigen Nebentyp χ.

Problem Tabellierung einer Basis für $M_k(m)$ (oder $M_k(m,\chi)$)

— der Fourierkoeffizienten $a_f(l)$ einer Basis $\{f\}$ von ..

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_0(m) \Rightarrow f(\tau+1) = f(\tau) \to f = \sum_{\substack{l \geq 0 \\ (l \geq 1 \text{ „Spitze")}}}^{\infty} a_f(l)\, q^l \qquad q = e^{2\pi i \tau}$