Satz

4) $E/\mathbb{Q}$ ell. Kurve (mit kompl. Mult.)

$\Rightarrow \exists\, m,\ f \in S_2(\Gamma_0(m)) : L(f,s)_{(m)} = \sum_{(n,m)=1} \frac{a(n)}{n^s} = \prod_{p \nmid m} \frac{1}{1-(p+1-\#E(\mathbb{F}_p))p^{-s}+p^{1-2s}} = L(E,s)$

$= \sum a(n) q^n$

Satz

$\# E(\mathbb{Q}) = \infty \Rightarrow L(f,1) = 0$

Beispiel: $S_2(\Gamma_0(32)) = \mathbb{C} f_{32}$, $L(f_{32}, s)_{(m)} = L(E,s)$ mit $E(\mathbb{C}) = \mathfrak{H}/\Gamma_0(32)$

Satz $D>0$ Diskrim. eines quadr. #-körpers

① Kongr.-Zahl $\Rightarrow L(f\otimes(\frac{D}{\cdot}),s) = \sum \frac{a(n)(\frac{D}{n})}{n^s}\Big|_{s=1} = 0$

Jacobiformen

Def. $k = 0, \pm 1, \dots,\ m = 1, 2, \dots$

$J^{\pm}_{k,m} = \Big\{ \phi : \mathfrak{H}\times\mathbb{C} \xrightarrow[\text{hol. in } z]{\text{glatt}} \mathbb{C},\ = \phi(\tau,z) \ \Big|$ 1) $\phi\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{z+\lambda\tau+\mu}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^k e^{2\pi i m \mathcal{R}(z,\tau)} \phi(\tau,z)$ $\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} \in \Gamma_1,\ \lambda,\mu \in \mathbb{Z}$

2) $L^{\pm}_m \phi = 0$

3) Beschr.-Bed. für $\operatorname{Im}\tau \to \infty$ $\Big\}$

$L^+_m = 8\pi i m \frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, $L^-_m = \overline{L^+_m}$

$J^{\varepsilon}_{k,m} \ni \phi$ hat FE $\phi = \sum_{\substack{\Delta, r \in \mathbb{Z} \\ \Delta \equiv r^2 (4m) \\ \varepsilon\Delta \geq 0}} c_\phi(\Delta, r)\, q_m^{\Delta, r}$

$q_m^{\Delta,r} = $ FD von $L^{\pm}_m = e^{2\pi i\left(\frac{r^2-\Delta}{4m} u + \frac{r^2+|\Delta|}{4m} iv + rz\right)}$ $(\tau = u+iv)$

$c_\phi(\Delta, r) = c_\phi(\Delta, r+2m)$.

$\exists$ Hecke-Operatoren $T(1), T(2), \dots$ auf $M_k(\Gamma_0(m))$, $J^{\pm}_{k,m}$ mit:

1) $M_k(m)$ hat eindeut. $\mathbb{T}$-Modul, $(\mathbb{T} = \langle T(1), T(2), \dots\rangle_{\mathbb{Z}})$

$M_k(m) = \bigoplus_{\substack{dm'|m \\ dm'<m}} M_k(m')|V_d \oplus M_k(m)^{\text{neu}}$, Multipl. 1 für $M_k(m)^{\text{neu}}$

$f \in M_k(m)^{\text{neu}}$ sim. Hef $\Leftrightarrow L(f,s)$ hat Eulerprodukt

Satz (Shimura–Zagier–...) $D, r \in \mathbb{Z}$, $D \equiv r^2 (4m)$, D FD, dann def.

$\phi \longmapsto \sum_n c_{T(n)\phi}(D,r)\, q^n$

eine Hecke-äquiv. Abb. $S_{D,r} : J_{k,m} = J^+_{k,m} \oplus J^-_{k,m} \longrightarrow M_{2k-2}(\Gamma_0(m))$.

Eine LK der $S_{D,r}$ ist Isom.

2. $f_0 \in M_k(m)^{\text{neu}}$ Hef $\exists!\ \mathbb{C}\cdot\phi_0 \in J_{k,m} : \mathbb{C}\, S_{D,r}\phi_0 = \mathbb{C} f_0\ \forall D, r$.