

(4)

Soient $f(t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} a(l) e^{-2lt}$, $g(t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} b(l) e^{-\rho lt}$, $a_0 \in \mathbb{R}$

avec $a(l), b(l) \geq \frac{p \cdot |l|}{\sqrt{1+l^2}}$, $\rho > 0$ convergent pour tout $t > 0$
 et telles que

$$(a_0 + f(t))t^k = c_0 g\left(\frac{1}{t}\right) \quad \text{pour } c_0 \text{ et un } k > 0.$$

Alors

$$a(0) \geq \frac{e^{-(k+1)}}{k} a(1)$$

Démo: $f(t) \downarrow$ pour $t \rightarrow \infty$

mais $(a_0 + f(t))t^k = c_0 g\left(\frac{1}{t}\right) \uparrow$, car $g(t) \downarrow$

donc

$$0 \leq \frac{d}{dt} (a_0 + f(t))t^k = k t^{k-1} f(t) + t^k \sum_{l \neq 0} a(l) e^{-2lt} (-2l),$$

$$a(0) \geq \sum_{l > 0} a(l) e^{-2lt} \left(\frac{2lt}{k} - 1\right) \geq a(1) e^{-2t} \left(\frac{2t}{k} - 1\right) \text{ si } t > \frac{k}{2}$$

Max pour $t = \frac{k+1}{2} \dots \square$

Exemples:

$$* f(t) = N_P(t) = \sum_{x \in P} e^{-\pi x^2 t} \quad (P \subseteq \mathbb{R}^n \text{ arith.})$$

$$f(t) t^{n/2} = \det(P)^{-1/2} N_{P^*}\left(\frac{1}{t}\right)$$

Donc

$$\frac{\pi}{2} \frac{e^{-(k+1)/2}}{\sqrt{2}} \geq \#\{x \in P \mid x^2 \leq l_{\min}\} \quad l_{\min} = \text{lag. min. des vect. de } P$$

$$P = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} e^{2\pi i \frac{1}{2}} : 7,38 \geq 6$$

$$P = E_8 : 593, \dots \geq 240$$

$$P = \text{Leech} : 5308960, \dots \geq 192 \cdot 240$$

Caractère: f forme modulaire sur $SL(2, \mathbb{Z})$ avec coeff. de Fourier non-négatifs,
 alors f n'est pas parabolique

(f parabol. \Rightarrow coeff. de Fourier ≥ 0 et < 0)