Minoration de régulateurs des corps de nombres ①

Séminaire de théorie de nombres, Bx 1995

Pour fixer les notations rappelons la définition de regulateur

K — corps de nombre

$\mathcal{O}$ — éléments entiers de K

$\mathcal{O}^*$ — unités de K

$W = \mathcal{O}^*_{tor.}$ = racines d'unités dans K

A_K — places archimédiennes de K, noté $|x|_v$ et

normalisé $|xt|_v = |x|_v t$ p.d. $t \in \mathbb{Q}_{>0}$

$r_1 = \#$ des v réels

$r_2 = \#$ des v complexes

$$e_v = \begin{cases} 1 & v \text{ réel} \\ 2 & v \text{ complexe} \end{cases}$$

(donc $r_1 + 2r_2 = [K:\mathbb{Q}]$)

unités en gén. →

Dirichelet: $\dim \mathcal{O}^* = r_1 + r_2 - 1 =: r_K$

produit scalaire naturelle sur $\mathbb{Q} \otimes \mathcal{O}^*$:

$$\langle \varepsilon, \varepsilon' \rangle = \sum_{v \in A_K} \log |\varepsilon|_v^{e_v} \cdot \log |\varepsilon'|_v^{e_v} \quad \text{pour } \varepsilon, \varepsilon' \in \mathcal{O}^*$$

Régulateur: $R(K) = \left(\det \text{ réseau } \mathcal{O}^*/W \text{ dans } \mathbb{Q} \otimes \mathcal{O}^*\right)^{1/2} \Big/ \sqrt{r_1 + r_2}$

$$= \frac{1}{\sqrt{r_1 + r_2}} \det(\langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle)^{1/2}$$

si $\mathcal{O}^* = W \times \varepsilon_1^{\mathbb{Z}} \times \ldots \times \varepsilon_r^{\mathbb{Z}}$.

$R(K) = 1$ si $K = \mathbb{Q}$ ou quadr. imag.

Regardons un moment le cas

K = réel quadr. ($r_K = 1$)

$$\left\{ \begin{matrix} \text{Unités réelles quadr.} \\ > 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \text{solut.} > 0 \text{ de } x^2 + bx + \eta = 0 \right. \quad \begin{matrix} (b \in \mathbb{Z}, \eta = \pm 1 \\ b^2 - 4\eta > 0, \\ \text{pas carré dans } \mathbb{Z}) \end{matrix}$$

~~Le plus petit positif unités ré $b = 1, \eta = 1$~~

$~~x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}~~$

$$= \left\{ \frac{-b + \sqrt{b^2+4}}{2}, \frac{b \pm \sqrt{b^2-4}}{2} \right\}$$

La plus petite: $x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (section d'or)

$\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})} = \langle \pm 1 \rangle \times x^{\mathbb{Z}}$ $\qquad R(K \text{ réel quadr.}) > \log \left| \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right| = 0{,}481$