Heidelberg: Abschätzung von Regulatoren nach unten. (24. ~~...~~ Mai 95)

Einheiten schwierig:

- Berechnung große Komplexität:

  D mit 8 Ziffern, Fund-Einheit in $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ mit 100 Ziffern

- in der anderen Richtung:

  Lehmer-Vermutung:

  es gibt $c>1$, sodaß $h(\alpha) = \prod_{\substack{|\bar\alpha|>1 \\ \bar\alpha \text{ alg. konj. zu } \alpha}} |\bar\alpha| \geq c$ für alle α ganz algebr., $\alpha \neq$ Einheitswurzel.

  klar: $\alpha \neq$ Einheit, dann $h(\alpha) \geq \prod_{\bar\alpha \text{ alg. konj. zu } \alpha} |\bar\alpha| \geq 2$

  also: Problem nur für Einheiten

  Smith (≈ 70): $\alpha \not\sim \frac{1}{\alpha} \Rightarrow h(\alpha) \geq h(\theta) = 1{,}3247\ldots$ wo $\theta^3 - \theta - 1 = 0$

  θ = Pisot-Zahl: eine $|$Wurzel$| > 1$, die anderen $|\cdot| < 1$

  Siegel (≈ 40): θ Pisot-Zahl mit kleinstem $h(\theta)$.

Sei $a_0 \in \mathbb{R}$, $f: \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ mit $f \geq 0$, $(a_0 + f(t))t \uparrow$ steigend,

$D(s) = \int f(t)\, t^s \frac{dt}{t}$ abs. konv. für $s > 1$.

Dann für $s > 1$:

$$a_0 \geq \frac{s(s-1)}{e} D(s) \exp\left(-\frac{s}{s-1} - s\frac{D'}{D}(s)\right)$$

Beweis: $w(t) = t \log^+(1/t)$ $\quad \left(\log^+ x = \begin{cases} \log x & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}\right)$

$$I(a) = \int_0^\infty (a_0 + f(t))\, t\, w((at)^{s-1}) \frac{dt}{t} \quad (a>0)$$

$t \to t/a$ zeigt $I(a) \downarrow$ fallend. Daher

$$I'(a) = (s-1) a^{s-2} \int (a_0 + f(t))\, t^s\, w'((at)^{s-1}) \frac{dt}{t} \leq 0$$

aber $w'(t) = -(1 + \log t)$ si $t < 1$, $= 0$ sonst, also

$$a_0 \int_0^{1/a} t^s (1 + \log((at)^{s-1})) \frac{dt}{t}$$
$$\geq -\int_0^\infty f(t)\, t^s (1 + \log((at)^{s-1})) \frac{dt}{t}$$
$$= -(1 + (s-1)\log a) D(s) - (s-1) D'(s).$$

links $= a_0 \frac{1}{s^2} a^{-s}$

$$\therefore a_0 \geq -s^2 a^s \left[(1 + (s-1)\log a) D(s) - (s-1) D'(s)\right]$$