5. Beweisskizze zum Dualitätssatz

Kombination von Hauptsatz + Eichler-Shimura-Isomorphismus.

Man hat (Eichler-Shimura)

$$S_k(m) \longrightarrow H^1_{cusp.}(\Gamma_0(m), \mathbb{C}[X]_{2k-2})^{\varepsilon} \qquad (\varepsilon \in \{\pm 1\}).$$

$$f \longmapsto \left(G \mapsto r_f^{\varepsilon}(G) := r_f(G)(X) + \varepsilon\, r_f(gGg)(-X)\right)$$

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad r_f(G) = \int_0^{G\infty} f(\tau)(X-\tau)^{2k-2}\, d\tau .$$

Besser zum Arbeiten benutzen (mit Manin-Trick)

$$S_k(m) \xhookrightarrow{\rho_k^{\varepsilon}} \mathbb{C}[X]_{2k-2}^{\Gamma_0(m)\backslash SL_2(\mathbb{Z})} \qquad (\Gamma_0(m)\backslash SL_2(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{P}_1(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}))$$

$$f \longmapsto \{r_f^{\varepsilon}(A)\}_{A \in \Gamma_0(m)\backslash SL_2(\mathbb{Z})} .$$

Sei $k_{D,r}(\tau, z, t)$ Kernfunktion von $S_{D,r}$, dann

$r_f^{Eig\,D} \circ k_{D,r}(\tau, z, t)$ = Jacobiform,

Rechnung zeigt: hat rationale Fourierkoeffizienten,

$f \in J_{2,m}^{cusp,Eig\,D}$: $\phi \perp r_f^{Eig\,D} k_{D,r} \quad \forall D > 0, r \in \mathbb{Z} \ldots$

$\Leftrightarrow \forall f \ \rho_{D,r}(\phi) = 0 \quad \forall D > 0, r \ldots$

$\Leftrightarrow \rho_{D,r}(\phi) = 0 \quad \forall D > 0, r \ldots$

$\overset{\text{Hauptsatz}}{\Leftrightarrow} \phi = 0 .$

Verallgemeinerung auf höheres Gewicht.