4. Zusammenhang mit Modulformen

Theorie der Jacobiformen (Eichler–Zagier)

Hauptsatz der Theorie (Zagier holomorphe ~, schief holomorphe ~)

Sei $k, m \in \mathbb{Z}$, $m > 0$, $k \geq 2$. Für jede Fundamentaldisk. $D < 0$ und jedes $s \in \mathbb{Z}$ mit $s^2 \equiv D \bmod 4m$ gibt es eine Abbildung

$$\mathcal{S}_{D,s} : J^{+(-)}_{k,m} \longrightarrow \mathfrak{M}_{2k-2}(m) \quad \left(= \text{gewisse natürliche Unterr.} \subseteq M_k(m),\ \supseteq M_k^{new}(m) \right)$$

explizit gegeben durch

$$\sum c(\Delta, r)\, e^{2\pi i(\ldots)} \longrightarrow \sum_{\ell \geq 1}^{\infty} \sum_{a \mid \ell} a^{k-2} \left(\frac{D}{a}\right) c\left(\frac{\ell^2}{a^2} D, \frac{\ell}{a} s\right) q^{\ell}.$$

Die Abbildung ist Hecke-äquivariant. ~~Das Bild~~ Eine geeignete Linearkomb. der $\mathcal{S}_{D,s}$ ist ein Isomorphismus.

Kenner werden an den Shimura-Lift erinnert: Tatsächlich enger Zusammenhang Jacobiformen zu Modulformen halbganzen Gewichts, Verallgemeinerung von Shimura Lift.

Hauptsatz hat Bedeutung zum Studium von Modulformen:

z.B. f Hecke-Eigenform, die erzeugt von ϕ mit $f \leftrightarrow \phi$.

Dann $\dfrac{L(f \otimes D, \frac{k}{2})}{\|f\|^2} = \dfrac{|c_\phi(D, r)|^2}{\|\phi\|^2}$ (für alle $D \equiv r^2 \bmod 4m$, $\phi \in J^{\operatorname{sig} D}_{k,-}$) $\hat{=}$ Waldspurger-Satz in der Theorie der Modulformen halbganzen Gewichts.

z.B. wenn $f = L_E(s)$, dann

$$L_{f \otimes D}(1) = L_{E_D}(1) = \text{Rang der Mordell-Weil Gruppe } E(\mathbb{Q}).$$