Beispiel

$$S(\tau) = -\frac{1}{2} \sum_{s \in \mathbb{Z}} H_{11}(s^2 - 4\ell) - \frac{1}{2} \sum_{\ell' \mid \ell} \min\left(\ell', \frac{\ell}{\ell'}\right),$$

$$H_{11}(\Delta) = \begin{cases} H(\Delta) & 11 \nmid \Delta \\ H\left(\frac{\Delta}{11^2}\right) & 11^2 \mid \Delta \end{cases},$$

$$H(\Delta) = \begin{cases} 0 & \Delta > 0 \\ -\frac{1}{12} & \Delta = 0 \\ \sum\limits_{\substack{Q(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 \in \mathbb{Z}(x,y) \\ b^2 - 4ac = \Delta \\ a, c > 0}} \frac{1}{|\mathrm{Aut}(Q)|/2} \end{cases} = \text{Hurwitz-Kronecker-Klassenzahl}.$$

do not state

4) Neue Methode

Dies hängt zusammen mit Jacobiformen, die ich noch studieren muss. Jedenfalls ergibt sich

Beispiel Setze für $\Delta > 0$, $r \in \mathbb{Z}$, $\Delta \equiv r^2 \bmod 44$, $\Delta \neq \square$, $A \in SL_2(\mathbb{Z})$

$$C_A(\Delta, r) = \#\left\{ 11ax^2 + bxy + cy^2 \;\middle|\; \begin{matrix} b^2 - 44ac = \Delta \\ b \equiv r \bmod 22 \end{matrix},\ \begin{matrix} a' > 0 \\ c' < 0 \end{matrix} \right\}$$
$$- \#\left\{ \quad \cdots \quad \begin{matrix} a' < 0 \\ c' > 0 \end{matrix} \right\}.$$

Hierbei ist

$$a'x^2 + b'xy + c'y^2 = (11ax^2 + bxy + cy^2) \circ A,$$

ist $Q(x,y)$ quadratische Form, so $Q \circ A(x,y) := Q\left(A\binom{x}{y}\right)$.

Dann

$$C_A(\Delta, r)\, a_g(\ell) = \sum_{a \mid \ell} \left(\frac{\Delta}{\ell}\right) C_A\left(\Delta \frac{\ell^2}{a^2}, r\frac{\ell}{a}\right),$$

$$C_A(\Delta, r) \cdot L_g(s) = \left(\sum_{1}^{\infty} \frac{C_A(\Delta\ell^2, r\ell)}{\ell^s}\right)\left(\sum_{1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\Delta}{\ell}\right)}{\ell^s}\right).$$