Es ist daher eine interessante Frage:

einfache arithmetische Bildungsgesetze zur Aufstellung der Fourierkoeffizienten einer Basis von $S_k(m)$.

Hierzu sind mir im wesentlichen vier Ansätze bekannt

1) Spezielle Konstr. z. B. $S_k(1) = 0$ für $k \le 11$, $S_{12}(1) = \mathbb{C}\,\Delta(\tau) = q\prod_1^\infty(1-q^n)^{24}$.

Damit $\sqrt[24]{\Delta(\tau)}$ = fast-Modulform auf $SL_2(\mathbb{Z})$ vom Gewicht $\frac{1}{2}$, damit

$$S_2(11) = \mathbb{C}\cdot\sqrt[12]{\Delta(\tau)\,\Delta(11\tau)} = \mathbb{C}\, q\prod_1^\infty(1-q^n)^{2+2(11,n)}.$$

2) Thetareihen (Hecke - Schoeneberg - Eichler)

$Q \in \mathbb{Z}[x_1,\dots,x_r]$ quadratische Form, $Q(x)>0$. Dann

$r_Q(n) = \#\{(x_1,\dots,x_r)\in\mathbb{Z}^r \mid Q(x_1,\dots,x_r)=n\} < \infty$

$\Theta_Q(\tau) := \sum r_Q(n)\, q^n$ ist Modulform vom Gewicht $\frac{r}{2}$.

Alle Modulformen vom Gewicht 2 lassen sich aus Thetareihen zu quaternären Formen oder "Twists" von solchen kombinieren.

Verallgemeinerung mittels sphärischer Polynome auf höheres Gewicht.

Beispiel

$S(\tau) = -\frac{5}{2}\,\Theta^2_{x^2+xy+3y^2}(\tau) + 6E(\tau)$.

3) Spurformel Es gilt nämlich "Hecke"-Operatoren $T(\ell)$ ($\ell = 1,2,\dots$) auf $S_k^{neu}(m)$ gesucht:
gilt: $f \in S_k^{neu}(m)$, $L(f,s)$ hat Eulerprodukt $\Longleftrightarrow$ f simultane Eigenform.

$S_k^{neu}(m)$ = Modul vom Rang 1 / der von den $T(\ell)$ erzeugten Algebra

Erzeugendes Element

$$\sum \mathrm{tr}\,(T(\ell), S_k^{neu}(m))\, q^\ell.$$

Eichler-Selberg-Spurformel: $\mathrm{tr}\,(T(\ell), S_k^{neu}(m))$ = explizite finite Formel