Satz (Hecke, Atkin-Lehner)

Es gibt eindeutig bestimmte $f_1, \dots, f_r \in M_k(m)$, sodaß

$$L_{f_i}(s) = \prod_p \frac{1}{1-\alpha_{f_i}(p)p^{-s} + p^{k-1-2s}\delta(p\nmid m)}$$

(Hecke-Eigenformen der Stufe m). Ist

$M_k^{neu}(m) := \mathrm{Span}\{f_i\}$, so $M_k(m) = \bigoplus_{d m' | m} M_k^{neu}(m')|V_d$ $\quad (V_d : f(\tau) \to f(d\tau))$.

Die $\alpha_{f_i}(p)$ ~~sind algebraische Zahlen~~ $\in$ endlich-algebraische Zahlkörper, ist f_i und $\sigma \in Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ so existiert j mit $f_i^\sigma = \sum a_{f_i}^\sigma(n) q^n = f_j$. $L_{f_i}(s)$ hat meromorphe Fortsetzung nach $\mathbb{C}$ (Pol höchstens bei $s=k$: Eisensteinreihen, holomorph: Spitzenformen),

$L^*_{f_i}(s) := (2\pi)^{-s} m^{s/2}\Gamma(s) L_{f_i}(s) = L^*_{f_i}(k-s)$.

Die Eisensteinreihen unter den f_i sind schnell bestimmt:

f_i Eisensteinreihe $\Rightarrow L_{f_i}(s) = L(s,\chi)L(s+1-k,\bar{\chi}) \times$ endliches Eulerprodukt

(χ Dirichletcharakter, $L(s,\chi) = \sum_1^\infty \frac{\chi(n)}{n^s}$).

Die Natur der $\alpha_{f_i}(p)$ ist noch weitgehend ungeklärt. Verknüpft mit vielen interessanten Fragestellungen, z.B.

(Eichler-Shimura-Theorie: f Hecke-Eigenform mit rationalen Fourier coefficients $\Rightarrow$

es gibt eine elliptische Kurve $E: y^2 + a_1 xy + a_3 y = x^3 + a_2 x^2 + a_4 x + a_6$ ($a_i \in \mathbb{Z}$), sodaß

$$\alpha_f(p) = p - \#\{(x,y) \in \mathbb{Z}/p \mid y^2 + a_1 xy + a_3 y \equiv_p x^3 + a_2 x^2 + a_4 x + a_6\}$$

Beispiel

$S_2(11) = \mathbb{C}\cdot S(\tau)$, $a_S(p) = p - \#\{(x,y)\in\mathbb{Z}/p \mid y(y-1) \equiv x^2(x-1)\}$.

p	2	3	5	7	11
$a_S(p)$	-2	-1	1	-2	1

$S(\tau) = q - 2q^2 - q^3 + 2q^4 + q^5 + 2q^6 - 2q^7 + \dots$

Taniyama-Weil-Vermutung: Umkehrung ist auch richtig. ($\Rightarrow$ Fermat-Vermutung)