Beispiel

$$X_0(11): \quad y(y-1) = x^2(x-1)$$

~~Es induziert nun~~

~~2. Warum und wie~~

$$f \longleftrightarrow f(\tau)\, d\tau^{k/2}$$

einen Isomorphismus

$$M_k(m) \approx \text{M von } k/2\text{-Formen auf } X_0(m) \text{ mit Divisor} \geq \text{gewissen durch } m \text{ best. Divisor}$$

insbesondere

$$\dim M_k(m) < \infty.$$

2. Warum und wie berechnet man Modulformen

Warum?: Sie sind eng mit verschiedenen zahlentheoretischen Fragestellungen verknüpft. Es werden Beispiele im Vortrag auftreten.

Berechnen?:

Beispiel

$$\wp(\tau,z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{Z}\tau+\mathbb{Z} \\ \gamma \neq 0}} \frac{1}{(z-\gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2}$$ erfüllt: $\wp\left(A\tau, \frac{z}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^2 \wp(\tau,z)$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$.

Damit folgt sofort

$$E(\tau) := \sum_{\substack{a \bmod 11 \\ (a,11)=1}} \wp\left(\tau, \frac{a}{11}\right) = \frac{5}{12} + \sum_{l \geq 1}^{\infty} \Big(\sum_{d \mid l} d\Big) q^l \in M_2(11)$$

Einfaches aber typisches Beispiel:

(i) Jede Modulform $f(\tau)$ hat Fourierentwicklung $f(\tau) = \sum_{n \geq 0}^{\infty} a_f(n)\, q^n$ $(q = e^{2\pi i \tau})$,

(ii) Fourierkoeffizienten sind arithmetisch interessante Funktionen. Hierzu betrachtet man am besten die L-Reihe $L_f(s) = \sum a_f(n)\, n^{-s}$.

Beispiel

$$L_E(s) = \sum_{1}^{\infty} \frac{a_E(n)}{n^s} = \zeta(s)\,\zeta(s-1)\,(1-11^{-s})(1-11^{1-s})$$

Dieses Beispiel spiegelt einen allgemeinen Sachverhalt wieder