(1)

Hamburg 4.7.89 (Modulformen, Jacobiformen, und wie man sie berechnet)

1. Was sind Modulformen

$\mathfrak{H}$ = obere komplexe Halbebene = $\{\tau \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\,\tau > 0\}$ = ~~die~~ hyperbolische einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche.

$f: \mathfrak{H} \to \mathbb{C}$ Modulform der Stufe m, vom Gewicht k

$:\Longleftrightarrow$

$f(\tau)$ holomorph, $\forall A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(m) := SL_2(\mathbb{Z}) \cap \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ m\mathbb{Z} & \mathbb{Z} \end{pmatrix}$: $\quad f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^k f(\tau)$,

$\forall A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$: $\quad f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = O((c\tau+d)^k)$ $\quad (\tau = iv,\ v \to \infty)$.

Vor der eigentlichen Fragestellung, warum dies für die Zahlentheorie interessant ist, die geometrische Interpretation dieser Daten.

Bekanntlich hat man

$$\mathrm{Bihol}(\mathfrak{H}) = SL_2(\mathbb{R}) \quad \left(\text{via: } (A,\tau) \to A\tau = \frac{a\tau+b}{c\tau+d} \quad \left(A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)\right).$$

Für jede kompakte Riemannsche Fläche X mit $g(X) \geq 2$ hat man

$$X = \Gamma \backslash \mathfrak{H} \quad \text{mit geeignetem } \Gamma \underset{\text{diskret}}{\subseteq} SL_2(\mathbb{R})$$

~~Hierbei treten natürlich nicht alle diskreten Γ auf.~~ Trotzdem ist es interessant die Quotienten $\Gamma \backslash \mathfrak{H}$ für beliebige diskrete Γ zu untersuchen. Insbesondere für solche Γ, die eine einfache Beschreibung haben, z.B. die arithmetischen Untergruppen von $SL_2(\mathbb{R})$, d.h. die, die zu $SL_2(\mathbb{Z})$ kommensurabel sind.

Besonders interessant sind hierbei wieder ~~solche~~, die Gruppen

$$\Gamma_0(m).$$

Man hat $X_0(m) := \overline{\Gamma_0(m)\backslash\mathfrak{H}}$ = natürliche Kompaktifizierung von $\Gamma_0(m)\backslash\mathfrak{H}$ = kompakte Riemannsche Fläche,

hat natürliche Struktur einer algebraischen Kurve über $\mathbb{Q}$, Formel für Geschlecht ist wohl bekannt

kann man mit: "$g(X_0(m))$ = wohl kennen"

$$g(X_0(m)) = \sum_{\substack{m' \mid m \\ m/m' \text{ quadratfrei}}} \left\{ \frac{m'}{12} - \frac{1}{3}\left(\frac{m'}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{-4}{m'}\right) - \frac{1}{2}a' + \delta_{b',1} \right\} \quad (m' = a'^2 b',\ b' \text{ quadratfrei})$$

m	1–10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
$g(X_0(m))$	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	2