

THEORIE DER EISENSTEINSCHEN REIHEN HÖHERER STUFE
UND IHRE ANWENDUNG
AUF FUNKTIONENTHEORIE UND ARITHMETIK

(Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität
Bd. 5, 1927, S. 199—224)

In der vorliegenden Arbeit bringe ich eine Reihe von Untersuchungen zur Darstellung, die notwendig sind, um eines der Grundprobleme der Theorie der elliptischen Modulfunktionen angreifen zu können: „Die Konstruktion der Integrale 1. Gattung der N -ten Stufe und die Bestimmung ihrer Perioden.“ // Durch die Gruppe $\Gamma(N)$ (die Gesamtheit der Modulsubstitutionen, welche mod. N der Identität kongruent sind) wird ein im Riemann-Kleinschen Sinne eindeutig bestimmtes algebraisches Gebilde definiert, nämlich der Körper der Funktionen von τ , welche bei der Gruppe $\Gamma(N)$ in τ invariant bleiben und nur algebraische Singularitäten besitzen. Man kennt aber noch eine andere Art, ein algebraisches Gebilde durch charakteristische „Moduln“ festzulegen, nämlich die Angabe der Perioden der Integrale 1. Gattung dieses Gebildes. Das genannte Grundproblem bedeutet also die Ermittlung des Zusammenhanges zwischen diesen zwei Arten der transzendenten Festlegung gewisser Riemannscher Flächen, und ist daher auch von Interesse für die allgemeine komplexe Funktionentheorie. Wichtiger scheinen mir aber, nach den bisher gefundenen Resultaten zu urteilen, die arithmetischen Konsequenzen zu sein; daß solche vorhanden sein werden, ist von vornherein plausibel, wenn man bedenkt, daß das algebraische Gebilde völlig bestimmt ist durch die natürliche Zahl N .

Bisher sind nur für einige numerische Werte von N Integrale 1. Gattung, und zwar mit Hilfe von Thetareihen dargestellt worden; für $N > 11$ ist dabei noch eine spezielle Gruppe der N -ten Stufe anstatt $\Gamma(N)$ zugrunde gelegt worden. Die Bestimmung der Perioden gelang nur in einem ganz kleinen Teil dieser Fälle, und eine Bearbeitung dieser Resultate nach der arithmetischen Seite ist noch gar nicht erfolgt. Die Thetareihen erscheinen dabei als deus ex machina, ihre Stellung innerhalb der Theorie der elliptischen Modulfunktionen ist auch heute noch keineswegs geklärt, und man weiß nichts darüber, ob etwa für allgemeine N die Thetareihen zur Konstruktion der Integrale 1. Gattung ausreichen. Um das Auftreten der Thetareihen (es sind hier im allgemeinen vierfache Thetareihen zu betrachten) in dieser Theorie zu verstehen, kann man einerseits das Bildungsgesetz dieser Reihen nach der arithmetischen Seite näher untersuchen, das kommt auf eine arith-

potenzen wegen (27)
ide Potenzen jeden-
aus (28) die Un-