Jacobiformen, die Perioden und Fourierkoeffizienten von Modulformen

Bordeaux 12. Feb & Grenoble 18. Feb. 93

Modulformen:

$SL(2,\mathbb{R})$, $\mathfrak{H} = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}\tau > 0\}$, $(A,\tau) \to A\tau = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$ $\quad \left(A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)$

$\Gamma \underset{\text{endl.}}{\subseteq} SL(2,\mathbb{Z})$, $\quad \Gamma = \pi_m^{-1}(G)$ wo $G \subseteq SL(2,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$, π_m = Red. mod m

$$M_k(\Gamma) = \left\{ f : \mathfrak{H} \xrightarrow{\text{hol.}} \mathbb{C} \;\middle|\; \begin{array}{l} 1)\ f(A\tau) = (c\tau+d)^k f(\tau) \ \forall A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \\ 2)\ f(A\tau)(c\tau+d)^{-k} = O(1)\ (\operatorname{Im}\tau \to \infty)\ \ \forall A \in SL(2,\mathbb{Z}) \end{array} \right\}$$

$k = 0,1,2,3,\ldots$

$\dim M_k(\Gamma) < \infty \qquad S_k(\Gamma) = \ldots\ldots \quad = o(1)$

~~Problem: Beschreibung einer Basis von $M_k(\Gamma)$.~~

Jedes $f \in M_k(\Gamma)$ 1-deutig bestimmt durch Angabe aller

1) Fourierkoeffizienten $a_f(\ell)$ $(\ell = 0,1,\ldots)$

$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma$, t min. $\rightsquigarrow f(\tau+t) = f(\tau) \overset{\text{mit } 2)}{\rightsquigarrow} f = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_f(\ell)\, q_t^{\ell} \qquad q_t := e^{2\pi i \tau/t}$

$a_f(0) = 0$ $(\forall f \in S_k(\Gamma))$

2) Perioden: $L(f|M,\ell)$ $\quad (M \in GL^+(2,\mathbb{Q}),\ 0 < \ell < k)$

$L(f,s) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{a_f(\ell)}{\ell^s}$ $\quad (\operatorname{Re} s > k)$ hat analytische Fortsetzung, höchstens Pol bei $s=k$,

$f|M(\tau) = f(M\tau)(c\tau+d)^{-k}$ $\quad \left(M = \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix}\right)$

$f \in S_2(\Gamma)$: $\quad L(f,1) = \int_0^{\infty} f(\tau)\,d\tau$

spezielle Perioden: $\quad L(f \otimes D, \tfrac{k}{2}) = \sum \frac{a_f(\ell)\left(\frac{D}{\ell}\right)}{\ell^s} \Big|_{s=\frac{k}{2}}$ $\qquad D$ Diskr. eines quadr. Zahlkörpers

Hecke's Grundproblem 1

~~1) & 2) Bei priori transzendenten Zahlen, wäre sinnlos wenn man nicht mehr wüßte, erste Untersuchungen von Hecke, muß für weitere Erklärungen z.B. auf Hecke zurückgehende Begriffe erklären~~

Annahme: $\Gamma = \Gamma_0(m) = SL(2,\mathbb{Z}) \cap \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ m\mathbb{Z} & \mathbb{Z} \end{pmatrix}$.

Hecke-Operatoren:

$$\mathcal{M}(\ell) = \left\{ M \in \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ m\mathbb{Z} & \mathbb{Z} \end{pmatrix} \;\middle|\; \det M = \ell \right\} \quad (\ell = 1,2,\ldots)$$

$T(\ell) : M_k(\Gamma) \circlearrowleft \qquad T(\ell) f = \ell^{k-1} \sum_{M \in \Gamma \backslash \mathcal{M}(\ell)} f|M$