4.6.3 制限のない場合

定理 4.17 (近岡 [3])

$$\begin{aligned} M(\Gamma_K) &= \mathbb{C}[A_2, B_3, B_4, B_5, C_4, C_5, C_6, D_6, D_8, F_7, F_9], \\ \sum_{k=0}^{\infty} \dim M_k(\Gamma_K) t^k &= \frac{1 - t^2 + t^3 + 2t^4 + t^5 + t^7 + 2t^8 + t^9 - t^{10} + t^{12}}{(1-t^2)^2(1-t^6)}. \end{aligned}$$

4.6.4 $\mathbb{Z}$ 上の場合

定理 4.18 (近岡 [3]) (1) $M^s_{\mathrm{ev}}(\Gamma_K, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[A_2, B_4, B_6, B_8, B_{10}, C_4, C_6]$,

(2) $M^s(\Gamma_K, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[A_2, B_4, B_6, B_8, B_{10}, B_{12}, C_4, C_6, D_9, D_{11}, D_{13}, D_{15}, F_7, F_9]$,

(3) $M(\Gamma_K, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[A_2, B_3, B_4, B_5, B_{12}, C_4, C_5, C_6, D_6, D_8, D_{15}, F_7, F_9]$.

4.7 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{65})$ の場合

4.7.1 Symmetric, even weight case

定理 4.19 (Hermann [22])

$$M^s_{\mathrm{ev}}(\Gamma_K) = \mathbb{C}[A_2, \widehat{A}_2, B_2, \widehat{B}_2, A_4, \widehat{A}_4, B_4, A_6],$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \dim M^s_{2k}(\Gamma_K) t^{2k} = \frac{1 + 6t^2 + 13t^4 + 28t^6 + 47t^8 + 72t^{10}}{1-t^6}.$$

5 文献に対する補足

Survey : Tsuyumine [47]
Modular embedding : Naganuma [31], [32], [33], [34], Oka [40] は総実 2, 3 次体の modular embedding に関する論文である.
Cohen-Macaulay 環 : $\mathbb{C}$ 上の graded ring A が Cohen-Macaulay であるとは, A の部分環 B で多項式環と同型であるようなものが存在して A が自由 B-加群になるということである. Eichler は [5], [6] の中で "Cohen-Macaulay である保型形式環を求めよ" という問題を提示している. Krull 次元が 2 の正規環は Cohen-Macaulay だから, elliptic modular form の場合は, Cohen-Macaulay である. Hilbert modular form の場合では次のことが知られている.[1]

[1] Siegel modular form の場合の結果は次の通り : [27], [28] の結果より, $M(\Gamma_2)^{(d)}$ $(d \geq 1)$ は Cohen-Macaulay. [52] の中で "$M(\Gamma_3)$ は Cohen-Macaulay でない" という記述があるが, Runge [49] の中でこれが正しくないことが指摘されている. 正しい結果は, "$M(\Gamma_3)$ は Cohen-Macaulay である". $n \geq 4, d \geq 1$ のとき, $M(\Gamma_n)^{(d)}$ は Cohen-Macaulay ではない ([51]).