4.4.3 character 付き保型形式の場合

前節の記号を使う.

$$\Gamma_A = \left\{ g \in \Gamma_K \mid g \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ or } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \pmod{\mathfrak{p}_2} \right\}$$

とおくと, Γ_A は Γ_K の指数 2 の部分群である. $\chi : \Gamma_K \to \{\pm 1\}$ を完全系列

$$1 \to \Gamma_A \to \Gamma_K \xrightarrow{\chi} \{\pm 1\} \to 1$$

によって定義される自明でない character とする. H^2 上の正則関数 f で

$$f|_k g = \chi(g)^k f \qquad (\forall g \in \Gamma_K)$$

をみたすもの全体を $M_k(\Gamma_A, \chi^k)$ と書き, $M(\Gamma_A, \chi) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} M_k(\Gamma_A, \chi^k)$ とおく.

定理 4.10 (van der Geer [11]) weight 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 10, 11 の保型形式からなる生成系がある：

$$\begin{aligned} &M(\Gamma_A, \chi) \\ &= \mathbb{C}\left[\frac{\sigma_2 t^2}{\sigma_3}, \frac{t^3}{\sqrt{\sigma_3}}, \frac{\sigma_2 t}{\sqrt{\sigma_3}}, t^2, \sigma_2, t\sqrt{\sigma_3}, \frac{\Delta t^4}{\sigma_3^{3/2}}, \frac{\delta t \sigma_2}{\sigma_3^{3/2}}, \sigma_3, \frac{\Delta t^3}{\sigma_3}, \frac{\delta \sigma_2}{\sigma_3}, \frac{\delta t^2}{\sigma_3}, \frac{\Delta t^2}{\sqrt{\sigma_3}}, \frac{\delta t}{\sqrt{\sigma_3}}, \right. \\ &\qquad \left. \frac{\delta \Delta t^2}{\sigma_3^{3/2}}, \Delta t, \delta, \frac{\delta \Delta t^3}{\sigma_3^2}, \Delta\sqrt{\sigma_3}, \frac{\delta \Delta t}{\sigma_3}, \frac{\delta \Delta}{\sqrt{\sigma_3}} \right]. \end{aligned}$$

ただし,

- $\delta^2 = (\sigma_2 + t^2)(\sigma_3^2 + \sigma_2 t^4 + t^6)$,
- $(\Delta t)^2 = -4\sigma_2^3 t^2 - 27\sigma_3^2 t^2$,
- 記号による関係式 (e.g. $\sigma_3 \cdot (t^3/\sqrt{\sigma_3})^2 = (t^2)^3$ など).

$$\sum_{k=0}^{\infty} \dim M_k(\Gamma_A, \chi) t^k = \frac{1 - 2t + 2t^2 + t^7 - t^9 + t^{10}}{(1-t)^2(1-t^6)}.$$

4.4.4 $H \times H_-$ 上の保型形式の場合

$\mathfrak{p}_3$ を norm 3 の素 ideal とする. $s_0, s_1, s_2, s_3 \in S_1(\Gamma(\mathfrak{p}_3))$, $\delta \in S_5(\Gamma(\mathfrak{p}_3))$ を適当にとる. $\sigma_i = \sigma_i(s_0, s_1, s_2, s_3), \Delta = \prod_{i<j}(s_i - s_j)$ とおく.