4.2.3 制限のない場合

定理 4.4 (Müller [29])

ϑ_2^2 $/\!/$

$$M(\Gamma_K) = \mathbb{C}[G_2, s_4, s_5, s_6, s_9],$$

$G_6 = 4S_6 + G_2 S_4$ とおく.

$S_5^2 = \underset{\overset{\shortparallel}{\vartheta_2^2}}{\underline{S_4}} G_6$ $\quad \therefore G_6 \overset{\exists}{=} G_3^2$

$S_5 = G_3 \vartheta_2$

$M(\tilde{\Gamma}_e) = \mathbb{C}[\vartheta_2, G_2, G_3, S$

$2+2+3+2=$

Quadratic relations: Nagaoka [39], Müller [29]

$$\begin{aligned} s_5^2 &= s_4(4s_6 + G_2 s_4), \\ s_9^2 &= s_6(-1728 s_6^2 - 288 G_2 s_4 s_6 + G_2^3 s_6 - 1024 s_4^3 + 4 G_2^2 s_4^2). \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \dim M_k(\Gamma_K) t^k = \frac{(1+t^5)(1+t^9)}{(1-t^2)(1-t^4)(1-t^6)}.$$

4.2.4 $\mathbb{Z}$ 上の場合

定理 4.5 (Nagaoka [38], [39]) (1) $M_{\mathrm{ev}}^s(\Gamma_K, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[G_2, s_4, s_6]$, G_2, s_4, s_6 は $\mathbb{Z}$ 上の生成系として minimal.

(2) $M^s(\Gamma_K, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[G_2, s_4, s_6, s_9]$, G_2, s_4, s_6, s_9 は $\mathbb{Z}$ 上の生成系として minimal.

4.3 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ の場合

4.3.1 Symmetric case

定理 4.6 (Gundlach [16], Hirzebruch [25])

$$M^s(\Gamma_K) = \mathbb{C}[G_2, G_3, G_4],$$

ここに, G_2, G_3, G_4 は Eisenstein 級数で, $\mathbb{C}$ 上代数的独立.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \dim M_k^s(\Gamma_K) t^k = \frac{1}{(1-t^2)(1-t^3)(1-t^4)}.$$

定理 4.7 (Gundlach [16], Hirzebruch [25]) $H \times H_-$ 上で考えたとき,

$$M^s(\Gamma_K) = \mathbb{C}[G_1, G_4, G_6].$$

ここに, G_1, G_4, G_6 は Eisenstein 級数で, $\mathbb{C}$ 上代数的独立.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \dim M_k^s(\Gamma_K) t^k = \frac{1}{(1-t)(1-t^4)(1-t^6)}.$$