$\mathcal{M} = \phi(H^2)$ とおく.

$$\phi(z_2, z_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \phi(z_1, z_2)$$

ゆえ, $f \in M_k(\Gamma_2)$ ならば, $f|\mathcal{M} \in M_k^s(\Gamma_K)$.

$$j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} j & O \\ O & j \end{pmatrix}$$

に対して

$$Sp_2(\mathbb{Z}, j) = \{M \in Sp_2(\mathbb{Z}) \mid {}^tJMJ \equiv M \pmod 2\}$$

とおくと, $Sp_2(\mathbb{Z}, j)$ は $Sp_2(\mathbb{Z})$ の部分群で $\Gamma(2)$ を含む.

$$\Phi(SL_2(\mathfrak{o}_K) \subset Sp_2(\mathbb{Z}, j)$$

が成立する. $m \in \mathbb{Z}^2$ は, $jm \equiv m \pmod 2$ をみたすとき, mod 2 diagonal という. characteristic $m = (m'm'')$ は, m', m'' がともに mod 2 diagonal であるとき, mod 2 diagonal と呼ばれる. mod 2 diagonal な m は

$$({}^tm', {}^tm'') = (0000),\ (0011),\ (1100),\ (1111)$$

の 4 つである.

$$\theta_2 := \prod_{\substack{\text{mod 2} \\ \text{diagonal}}} \theta_m$$

とおくと, $(\theta_2)^2 \in M_4(Sp_2(\mathbb{Z}, j))$ で, $(\theta_2)^2|\mathcal{M} \in M_4^s(\Gamma_K)$. この $(\theta_2)^2|\mathcal{M}$ が Ker $\mathbb{D}$ の生成元となる.

4.2.2 Symmetric case

定理 4.3 (Gundlach [16], Hirzebruch [24], Nagaoka [39], Müller [29])

$$M^s(\Gamma_K) = \mathbb{C}[G_2, s_4, s_6, s_9],$$

A quadratic relation: Nagaoka [39] θ_2^2

$$s_9^2 = s_6(-1728 s_6^2 - 288 G_2 s_4 s_6 + G_2^3 s_6 - 1024 s_4^3 + 4 G_2^2 s_4^2).$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \dim M_k^s(\Gamma_K) t^k = \frac{1 + t^9}{(1 - t^2)(1 - t^4)(1 - t^6)}.$$