4.2 $K=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ の場合

ここで使われる方法は, $K=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ の場合と本質的に同じである. 難しいところは Ker $\mathbb{D}$ を生成する h_0 を求めるところである.

4.2.1 Symmetric, even weight case

定理 4.2 (Gundlach [16], Hammond [18], Fomenko [8])

$$M^s_{\mathrm{ev}}(\Gamma_K)=\mathbb{C}[G_2,s_4,s_6],$$

ここに, G_2,s_4,s_6 は $\mathbb{C}$ 上代数的独立.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\dim M^s_{2k}(\Gamma_K)t^{2k}=\frac{1}{(1-t^2)(1-t^4)(1-t^6)}.$$

定理 3.1 の中の性質をもつ h_0 を求めよう. 以下は, modular embedding を使った Hammond の結果である.

$\epsilon=1+\sqrt{2}$, $\alpha=\sqrt{\frac{\epsilon}{2\sqrt{2}}}$, $\overline{\alpha}=\sqrt{-\frac{\overline{\epsilon}}{2\sqrt{2}}}$, $a=\begin{pmatrix}\alpha & \overline{\alpha}\\ \overline{\alpha} & -\alpha\end{pmatrix}$,

$N=\begin{pmatrix}a & O\\ O & a\end{pmatrix}$ とおく. ただし, $\overline{\epsilon}$ は ϵ の $\mathbb{Q}$ 上の共役とする.

$\phi=N\phi_0, \Phi=N\Phi_0N^{-1}$ と定めると

$$\phi(z)=a\begin{pmatrix}z_1 & 0\\ 0 & z_2\end{pmatrix}a=\begin{pmatrix}\mathrm{Tr}(\frac{\epsilon}{2\sqrt{2}}z) & \mathrm{Tr}(\frac{1}{2\sqrt{2}}z)\\ \mathrm{Tr}(\frac{1}{2\sqrt{2}}z) & \mathrm{Tr}(-\frac{\overline{\epsilon}}{2\sqrt{2}}z)\end{pmatrix}$$

であり, $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in SL_2(\mathfrak{o}_K)$ に対して

$$a=a_1+a_2\sqrt{2}, b=b_1+b_2\sqrt{2}, c=c_1+c_2\sqrt{2}, d=d_1+d_2\sqrt{2}\quad (a_i,b_i,c_i,d_i\in\mathbb{Z})$$

と書くと

$$\Phi(\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}a_1+a_2 & a_2 & b_1+b_2 & b_2\\ a_2 & a_1-a_2 & b_2 & b_1-b_2\\ c_1+c_2 & c_2 & d_1+d_2 & d_2\\ c_2 & c_1-c_2 & d_2 & d_1-d_2\end{pmatrix}$$

となる. このとき, (ϕ,Φ) は $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ の modular embedding である.