(4) と $M^s_{\mathrm{ev}}(\Gamma_K)=\mathbb{C}[G_2,J_6,J_{12}]$ から G_2,J_6,J_{10},J_{12} は $\mathbb{Z}$ 上の生成系として minimal であることがわかる.

次に $M^s(\Gamma_K,\mathbb{Z})$ の構造を見よう. $M^s_{15}(\Gamma_K,\mathbb{Z})$ の元 J_{15} で次をみたすものが存在する:

$$J_{15}^2=5^5J_{10}^3-2\cdot 3^3J_6^5+2\cdot 5^2J_2J_6^3J_{10}+2\cdot 5^3J_2J_6J_{10}J_{12}+J_2^3J_{12}^2, \quad (5)$$
$$\mathbb{D}(J_{15})=\Delta^2 g_6. \quad (6)$$

$f\in M^s_{\mathrm{od}}(\Gamma_K,\mathbb{Z})$ のとき, $g\in M^s_{\mathrm{ev}}(\Gamma_K,\mathbb{Z})$ で $f=J_{15}g$ となるものが存在する. Gundlach の議論と同様のことを行うと

$$M^s(\Gamma_K,\mathbb{Z})=\mathbb{Z}[G_2,J_6,J_{10},J_{12},J_{15}].$$

(5) と $M^s(\Gamma_K)=\mathbb{C}[G_2,J_6,J_{10},J_{15}]$ から G_2,J_6,J_{10},J_{15} は $\mathbb{Z}$ 上の生成系として minimal であることがわかる.

以上の結果をまとめると

定理 3.12 (Nagaoka [38], [39]) (1) $M^s_{\mathrm{ev}}(\Gamma_K,\mathbb{Z})=\mathbb{Z}[G_2,J_6,J_{10},J_{12}]$, G_2,J_6,J_{10},J_{12} は $\mathbb{Z}$ 上の生成系として minimal.

(2) $M^s(\Gamma_K,\mathbb{Z})=\mathbb{Z}[G_2,J_6,J_{10},J_{12},J_{15}]$, $G_2,J_6,J_{10},J_{12},J_{15}$ は $\mathbb{Z}$ 上の生成系として minimal.

4 その他の結果

4.1 Hilbert modular 群の作用

$H_-=\{\tau\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Im}(\tau)<0\}$ を複素下半平面とする. K の Hilbert modular 群 Γ_K は, $H\times H_-$ の上へ, H^2 のときと同様の仕方で作用する.

定義 4.1 Γ_K の H^2, $H\times H_-$ への作用が正則同値であるとは, 正則同型 $\lambda: H^2\to H\times H_-$ と Γ_K の自己同型 $\Lambda:\Gamma_K\to\Gamma_K$ で

$$\lambda(\gamma\cdot z)=\Lambda(\gamma)\cdot\lambda(z)\quad(\gamma\in\Gamma_K,\ z\in H^2)$$

となるものが存在するということである.

定理 4.1 (Hammond [20]) 次は同値.

(1) Γ_K の H^2, $H\times H_-$ への作用は正則同値.

(2) d_K は 2 つの平方数の和として表せる.

よって, $d_K=5,8,13,17,65$ の場合は正則同値で, $d_K=12,24$ の場合は正則同値でない. $d_K=12,24$ の場合に $H\times H_-$ 上の Hilbert 保型形式環の結果を後で紹介する.