定理 3.10 (Müller [30]) $M(\Gamma_K) = \mathbb{C}[G_2, s_5, s_6, s_{15}]$,

$$\begin{aligned} s_5^2 &= s_{10}, \\ s_{15}^2 &= 5^5 s_{10}^3 - 2^{-1}\cdot 5^3 G_2^2 s_6 s_{10}^2 + 2^{-4} G_2^5 s_{10}^2 \\ &\quad +2^{-1}\cdot 3^2\cdot 5^2 G_2 s_6^3 s_{10} - 2^{-3} G_2^4 s_6^2 s_{10} - 2\cdot 3^3 s_6^5 + 2^{-4} G_2^3 s_6^4. \end{aligned}$$

s_{15} に関する関係式は Resnikoff の得た関係式と同一のものである．その別証明は次のような初等的な方法で行なわれる．$s_{15}^2 \in M_{\mathrm{ev}}^s(\Gamma_K)$ だから, 適当な $b_i \in \mathbb{C}$ $(i = 1, \ldots, 13)$ を用いて

$$\begin{aligned} s_{15}^2 &= b_1 s_{10}^3 + b_2 g_2^2 s_6 s_{10}^2 + b_3 g_2^5 s_{10}^2 + b_4 g_2 s_6^3 s_{10} + b_5 g_2^4 s_6^2 s_{10} \\ &\quad + b_6 g_2^7 s_6 s_{10} + b_7 g_2^{10} s_{10} + b_8 s_6^5 + b_9 g_2^3 s_6^4 + b_{10} g_2^6 s_6^3 + b_{11} g_2^9 s_6^2 \\ &\quad + b_{12} g_2^{12} s_6 + b_{13} g_2^{15} \end{aligned}$$

と書ける．両辺の Fourier 係数を比較して, $b_1, \ldots, b_{13}$ を求める．

3.5 Nagaoka の結果

Nagaoka に従い, 次の記号を用いる．

$$J_6 = s_6, \quad J_{10} = s_{10}, \tag{3}$$
$$J_{12} = 2^{-2}(J_6^2 - G_2 J_{10}) \tag{4}$$

とおくと, $J_6, J_{10}, J_{12} \in M^s(\Gamma_K, \mathbb{Z})$.

定理 3.11 (Nagaoka [38])
(1) $\mathbb{D}(G_2) = g_4, \mathbb{D}(J_6) = 2\Delta, \mathbb{D}(J_{10}) = 0, \mathbb{D}(J_{12}) = \Delta^2$.
(2) $f \in M_{2k}^s(\Gamma_K, \mathbb{Z})$ に対して

$$\mathbb{D}(f) = c_0 g_4^k + c_1 g_4^{k-3}\Delta + \cdots + c_i g_4^{k-3i}\Delta^i + \cdots$$

と表すと, $c_1, c_3, c_5, \ldots$ は偶数.

この定理より

$$\mathbb{D}(M_{\mathrm{ev}}^s(\Gamma_K, \mathbb{Z})) = \mathbb{D}(\mathbb{Z}[G_2, J_6, J_{12}]).$$

$f \in M_{\mathrm{ev}}^s(\Gamma_K, \mathbb{Z})$ に対して $\mathbb{D}(f) = 0$ が成立すれば, f は $M_{\mathrm{ev}}^s(\Gamma_K, \mathbb{Z})$ において J_{10} で割り切れる．Gundlach の議論と同様のことを行うと

$$M_{\mathrm{ev}}^s(\Gamma_K, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[G_2, J_6, J_{10}, J_{12}].$$