の別証明を与える.

$$\psi_k(Z)=\sum_{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\left\{\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}\right\}\backslash\Gamma_2}\det(CZ+D)^{-k}$$

: Γ_2 の weight k の normalized Eisenstein 級数

$$\theta_m(Z)=\sum_{p\in\mathbb{Z}^n}\exp\pi i\{{}^t(p+\frac{1}{2}m')Z(p+\frac{1}{2}m')+{}^t(p+\frac{1}{2}m')m''\}$$

: characteristic $m=(m'm'')$ の genus n の theta constant $\quad(m',m''\in\mathbb{Z}^n)$

${}^tm'm''$ が偶数のとき, m を even といい, θ_m は恒等的に 0 でない. mod 2 で even な θ_m は $2^{n-1}(2^n+1)$ 個.

$n=2$ の場合に

$$\theta(Z):=\prod_{\text{even}}\theta_m(Z)$$

とおくと, $\theta^2\in M_{10}(\Gamma_2)$.

$\epsilon=(1+\sqrt{5})/2$, $\beta=\sqrt{\epsilon/\sqrt{5}}$, $\overline{\beta}=\sqrt{-\overline{\epsilon}/\sqrt{5}}$, $a=\begin{pmatrix} \beta & \overline{\beta} \\ \overline{\beta} & -\beta \end{pmatrix}$ とおく.

$N=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ とおく. ただし, $\overline{\epsilon}$ は ϵ の $\mathbb{Q}$ 上の共役とする.

$\phi=N\phi_0, \Phi=N\Phi_0N^{-1}$ と定めると,

$$\phi(z)=a\begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix}a=\begin{pmatrix} \mathrm{Tr}(\frac{\epsilon}{\sqrt{5}}z) & \mathrm{Tr}(\frac{1}{\sqrt{5}}z) \\ \mathrm{Tr}(\frac{1}{\sqrt{5}}z) & \mathrm{Tr}(-\frac{\overline{\epsilon}}{\sqrt{5}}z) \end{pmatrix}$$

であり, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in SL_2(\mathfrak{o}_K)$ に対して

$$a=a_1+a_2\epsilon, b=b_1+b_2\epsilon, c=c_1+c_2\epsilon, d=d_1+d_2\epsilon \quad (a_i,b_i,c_i,d_i\in\mathbb{Z})$$

と書くと

$$\Phi(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix})=\begin{pmatrix} a_1+a_2 & a_2 & b_1+b_2 & b_2 \\ a_2 & a_1 & b_2 & b_1 \\ c_1+c_2 & c_2 & d_1+d_2 & d_2 \\ c_2 & c_1 & d_2 & d_1 \end{pmatrix}$$

となる. このとき, (ϕ,Φ) は K の modular embedding.